

Chapitre 12 : Suites Usuelles

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites arithmétiques

Définition 1

Soient $r \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** de raison r si elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Preuve 1

Remarque 1 Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on a également :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

Exercice 1 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1$. Exprimer u_n en fonction de n .

2 Suites géométriques

Définition 2

Soient $q \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** de raison q , si elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

Preuve 2

Remarque 2 Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on a également:

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$. Exprimer u_n en fonction de n .

3 Suites arithmético-géométriques

Définition 3

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b,$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$.

Remarque 3 ► Si $a = 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b .

► Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

Formule explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b,$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ et $a \neq 1$.

On souhaite déterminer l'expression explicite de u_n en fonction de n .

Pour cela, on introduit **le point fixe** de la suite, c'est-à-dire le nombre ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ (qui vaut donc $\ell = b/(1 - a)$).

On effectue alors la soustraction suivante :

$$\begin{array}{rccccccc} u_{n+1} & = & au_n & + & b & & \\ \ominus & \ell & = & a\ell & + & b & \\ \hline u_{n+1} - \ell & = & a(u_n - \ell) & & & & \end{array}$$

Donc la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \ell = a^n (u_0 - \ell).$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell).$$

Exemples 1 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

Exprimer u_n en fonction de n .

4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Définition 4

On appelle **suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux** toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{K}.$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples 2 La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$.

Théorème 1: (Cas réel)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux vérifiant :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note $r^2 - ar - b = 0$ son équation caractéristique et $\Delta = a^2 + 4b$.

(i) Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

(ii) Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine réelle double r_0 . Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An + B)r_0^n.$$

(iii) Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$. Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)).$$

Remarque 4 La détermination de A et B se fait à l'aide des valeurs de u_0 et u_1 qui conduit à la résolution d'un système linéaire de deux équations dont A et B sont les inconnues.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer u_n en fonction de n .

Théorème 2: (Cas complexe)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux suivante :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note $r^2 - ar - b = 0$ son équation caractéristique et $\Delta = a^2 + 4b$.

- (i) Si $\Delta \neq 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 . Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- (ii) Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine complexe double r_0 . Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An + B)r_0^n.$$