Chapitre 10 : Géométrie dans l'espace

1 Coordonnées cartésiennes

1.1 Vecteurs coplanaires

Définition 1

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{w}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Exemples 1 *Si $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Définition 2

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si l'un de ces vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
Autrement dit, s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{w} + \mu\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

Exemples 2 *Si $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$ alors $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.*

Proposition 1

Trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont coplanaires si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ tel que

$$\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}.$$

1.2 Base et repère cartésien

Définition 3

- On appelle **base (de l'espace)** tout triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont trois vecteurs de l'espace non coplanaires.
- On appelle **repère (cartésien) (de l'espace)** tout quadruplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où O est un point de l'espace et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de l'espace.

Proposition-Définition 1

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère cartésien de l'espace.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. Alors, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tel que

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

On l'appelle le **triplet des coordonnées (cartésiennes)** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On note alors :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}(x, y, z).$$

- Soit M un point de l'espace. Les coordonnées (x, y, z) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées **les coordonnées (cartésiennes)** de M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On a donc:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

On note alors :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M(x, y, z).$$

Exemples 3 *On pose :* $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$*,* $\vec{e}_2 = (1, 0, 2)$ *et* $\vec{e}_3 = (1, 2, 1)$*.*
On admet que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *est une base de l'espace.*
Exprimer les coordonnées de $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *dans la base* $\mathcal{B}$*.*

Proposition 2

Un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace étant fixé, soient $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et $B\,(x_B, y_B, z_B)$ deux points.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)\,.$$

- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Exemples 4 *Dans le repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, 3)$ et $B(3, 4, 5)$. Donner les coordonnées du milieu de $[AB]$ ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

1.3 Repère orthonormal

Définition 4

- Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de l'espace. On dit que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est **orthonormale ou (orthonormée),** si $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont deux à deux orthogonaux et si $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$.
- Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère cartésien. On dit que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est **orthonormal ou (orthonormé),** si sa base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ l'est.

Définition 5

Considérons $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Soient I, J et K des points de l'espace tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. On considère un «observateur» placé les pieds en O, la tête en K et qui a le point I devant lui. Par convention, on dit que :

- le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **direct** si l'observateur a le point J à sa gauche. On dit aussi que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe**.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **indirect** si l'observateur a le point J à sa droite. On dit aussi que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **indirecte**.

Choisir une orientation de l'espace, c'est choisir de travailler avec les repères directs, ou avec les repères indirects. Si on fixe un repère dans l'espace, on choisit une orientation.

2 Produit scalaire

2.1 Définition

Définition 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 1 *$(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure non orientée de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Proposition 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux } \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemples 5 *Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de l'espace. Déterminer les produits scalaires $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$.*

2.2 Propriétés du produit scalaire

Proposition 4

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs de l'espace et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ **(le produit scalaire est symétrique)**

(iii) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w}$ **(le produit scalaire est linéaire à gauche)**

(iv) $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w}$ **(le produit scalaire est linéaire à droite)**

2.3 Expression à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée

Proposition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Preuve. 1

Exemples 6 *Calculer* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *et* $\vec{w} \cdot \vec{u}$ *où* $\vec{u}(2, -2, 1), \vec{v}(2, 2, 0)$ *et* $\vec{w}(1, 1, 1)$.

3 Produit vectoriel

3.1 Définition

Définition 7

On appelle **produit vectoriel du couple de vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur vérifiant :
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  - la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe,
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour norme $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 2 *On rappelle que* $(\vec{u}, \vec{v})$ *désigne la mesure de l'angle non orienté entre* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *(dont le sinus est positif).*

Exemples 7 *Soit* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *une base orthonormée directe. Calculer les produits vectoriels* $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$ *pour* $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Proposition 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

3.2 Propriétés du produit vectoriel

Proposition 7

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs de l'espace et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

(ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ **(le produit vectoriel est antisymétrique)**

(iii) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{w} + \mu\vec{v} \wedge \vec{w}$ (le produit vectoriel est linéaire à gauche)

(iv) $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\vec{u} \wedge \vec{w}$ **(le produit vectoriel est linéaire à droite)**

3.3 Expression à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée directe

Proposition 8

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$

Preuve. 2

Exemples 8 *Calculer* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *et* $\vec{w} \wedge \vec{u}$ *où* $\vec{u}(2, -2, 1), \vec{v}(2, 2, 0)$ *et* $\vec{w}(1, 1, 1)$.

3.4 Interprétation géométrique

Proposition 9

- Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

- Soit $ABDC$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

Preuve. 3

4 Déterminant ou produit mixte

4.1 Définition

Définition 8

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté. On appelle **produit mixte de** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le nombre réel, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, défini par :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

On l'appelle aussi **déterminant** de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exemples 9 *Soit* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *une base orthonormée directe de l'espace.*
Déterminer $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $[\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_3]$, $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1]$.

Proposition 10

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors :

(i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont coplanaires si et seulement $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

(ii) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

(iii) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$.

4.2 Interprétation géométrique

Proposition 11

Soit $\mathcal{V}$ le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Alors :

$$\mathcal{V} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|.$$

4.3 Propriétés du produit mixte

Proposition 12

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels λ_1 et λ_2, on a :

- $[\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda_1 [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \lambda_2 [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$
- $[\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \vec{w}] = \lambda_1 [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \lambda_2 [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$
- $[\vec{u}, \vec{v}, \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2] = \lambda_1 [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \lambda_2 [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$

Proposition 13

Le signe du déterminant change lorsque l'on échange deux vecteurs. Par exemple :

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

4.4 Expression à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée directe

Proposition 14

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de coordonnées respectives $(x, y, z), (x', y', z')$ et (x'', y'', z'') dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

Preuve. 4

Exemples 10 *Calculer le déterminant* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ *où* $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-1, 2, 3)$ *et* $\vec{w}(0, 1, -1)$.

5 Plans de l'espace

Dans toute la suite de ce chapitre, on donne les coordonnées dans un repère orthonormé direct de l'espace.

5.1 Différents moyens de définir un plan

Définition 9

Un plan $\mathcal{P}$ peut être défini par :

- La donnée d'un point A et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. **Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est alors l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, tel que
$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$
Autrement dit, l'ensemble des points M de l'espace vérifiant
$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0.$$
- La donnée de trois points A, B et C non alignés. **Le plan $\mathcal{P}$ passant par ses trois points** est alors l'ensemble des points M de l'espace tels que
$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0.$$
- La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{n}$ normal. **Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$** est alors l'ensemble des points M de l'espace tels que
$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

5.2 Équations paramétriques de plan

Proposition-Définition 2

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}\,(\alpha', \beta', \gamma')$. Pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, on a

$$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\alpha + s\alpha' \\ \\ y = y_A + t\beta + s\beta' \\ \\ z = z_A + t\gamma + s\gamma' \end{array}\right.$$

Le système

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\alpha + s\alpha' \\ \\ y = y_A + t\beta + s\beta' \\ \\ z = z_A + t\gamma + s\gamma' \end{array}\right.$$

est alors appelé une **équation paramétrique** ou un **système paramétrique** ou encore une **représentation paramétrique** de $\mathcal{P}$.

Preuve. 5

Exemples 11 *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1,2,3), B(-1,2,1)$ et $C(5,4,3)$.*

5.3 Équations cartésiennes

Proposition-Définition 3

- Soit $\mathcal{P}$ un plan affine passant par un point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ de l'espace et admettant le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ comme vecteur normal.
  Alors, pour tout point M de l'espace de coordonnées (x,y,z) :

  $$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$

  L'équation $ax+by+cz+d=0$ est appelée une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.
- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c, d sont des réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, est un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$.

Preuve. 6

Exemples 12 *Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $A(1,1,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,1,-3)$.*

Exemples 13 *Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1,2,3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(2,2,2)$ et $\vec{v}(0,1,0)$.*

5.4 Distance d'un point à un plan

Théorème 1

Soient M un point de l'espace de coordonnées (x_M, y_M, z_M) et $\mathcal{P}$ un plan. La distance de M à $\mathcal{P}$ est notée $d(M,\mathcal{P})$.

(i) Si $\mathcal{P}$ passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

(ii) Si $\mathcal{P}$ passe par un point A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, alors :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\det\left(\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{AM}\right)\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\|}$$

(iii) Si $ax+by+cz+d=0$ une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, alors :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Preuve. 7

6 Droites de l'espace

6.1 Définition

Définition 10

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
On appelle **droite passant par** A **et dirigée par** $\vec{u}$ l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire avec $\vec{u}$.
Autrement dit, la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$.

6.2 Systèmes d'équations paramétriques

Proposition-Définition 4

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$. Pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, on a

$$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

Le système

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

est alors appelé une **équation paramétrique** ou un **système paramétrique** ou encore une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$.

Preuve. 8

Exemples 14 *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(-1, 1, 2)$ et $B(1, 2, 1)$.*

6.3 Système d'équations cartésiennes

Proposition-Définition 5

On se donne des réels a, b, c, d et a', b', c', d' tels que les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont non nuls et non proportionnels. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$$

est une droite de vecteur directeur $\vec{n}\wedge\vec{n}'$ où $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n}'\,(a', b', c')$.
Réciproquement, toute droite admet au moins un système d'équations de ce type.

6.4 Distance d'un point à une droite

Proposition 15

Soient $\mathcal{D}$ une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et M un point de l'espace. On a :

$$d\left(M, \mathcal{D}\right)=\frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Preuve. 9

Exemples 15 *Calculer la distance du point $M(5, 7, 8)$ à la droite (AB) où $A(1, 1, 1)$ et $B(0, 0, -1)$.*

6.5 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Proposition 16

Soient $\mathcal{D}$ une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et M un de l'espace. Si on note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ alors H vérifie :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Preuve. 10

Exemples 16 *Déterminer le projeté orthogonal de* $M(5,7,8)$ *sur la droite* (AB) *où* $A(1,1,1)$ *et* $B(0,0,-1)$.

7 Sphères de l'espace

7.1 Équations cartésiennes

Définition 11

Soient A un point de l'espace et $R \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **sphère** de centre A et de rayon R l'ensemble noté $\mathcal{S}(A,R)$ des points M de l'espace tels que $AM = R$.

Proposition 17

Soient $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ un point de l'espace et $R \in \mathbb{R}_+$.
Alors, pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace :

$$M \in \mathcal{S}(A, R) \Longleftrightarrow \left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2 + \left(z - z_A\right)^2 = R^2.$$

L'équation $\left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2 + \left(z - z_A\right)^2 = R^2$ est alors appelée une **équation cartésienne du sphère** $\mathcal{S}(A, R)$.

Preuve. 11

Exemples 17 *Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre* $A(3, 7, 3)$ *et de rayon* 10.

Proposition 18

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

est soit une sphère (éventuellement réduit à son centre) soit l'ensemble vide.

Exemples 18 *l'ensemble* $\mathcal{A}$ *des points* $M(x, y, z)$ *tels que :* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 8 = 0$

Exemples 19 *Déterminer l'ensemble* $\mathcal{B}$ *des points* $M(x, y, z)$ *tels que :*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - y + 2z + 10 = 0$$

7.2 Intersection d'une sphère et d'un plan.

Proposition 19

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre A et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

- Si $d(A, \mathcal{P}) > \mathrm{R}$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $d(A, \mathcal{P}) = R$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{H\}$.
- Si $d(\mathrm{A}, \mathcal{P}) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2(A, \mathcal{P})}$.

Dans le deuxième cas, on dit que $\mathcal{P}$ est **le plan tangent à la sphère** $\mathcal{S}$ au point H.

Exemples 20 *Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des points $M(x, y, z)$ tels que :* $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ *est un cercle dont on précisera le centre et le centre.*