LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Chapitre 9 : Géométrie Plane

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

1 Repérage dans le plan

1.1 Base et repère cartésien

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Exemples 1 *Si $\vec{u} = 3\vec{v}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

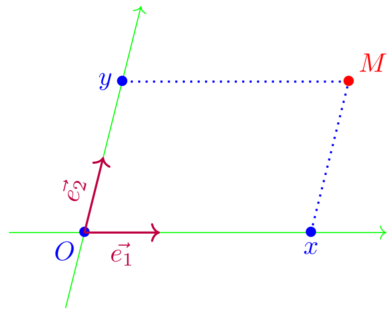
Définition 2

- On appelle **base (du plan)** tout couple $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont deux vecteurs du plan non colinéaires.
- On appelle **repère (cartésien) (du plan)** tout triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où O est un point du plan et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base du plan.

Proposition-Définition 1

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère cartésien de l'espace.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Alors, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que
$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$
On l'appelle le **couple des coordonnées (cartésiennes)** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note alors :
$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{u}(x, y).$$
- Soit M un point du plan. Les coordonnées (x, y) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées **les coordonnées (cartésiennes)** de M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On a donc:
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$
On note alors :
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } M(x, y).$$



Exercice 1 *On pose :* $\vec{e}_1 = (1,1)$ *et* $\vec{e}_2 = (1,2)$.

1. *Justifier que* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *est une base du plan.*
2. *Exprimer les coordonnées de* $\vec{u} = (2,1)$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Proposition 1

Un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé, soient $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ deux points.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées
$$(x_B - x_A, y_B - y_A)\,.$$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées
$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Exercice 2 *Dans le repère usuel* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on considère les points* $A(1, 2)$ *et* $B(3, 4)$. *Donner les coordonnées du milieu de* $[AB]$ *et les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

1.2 Repère orthonormal

Définition 3

- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan est dite **directe** si l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ possède une mesure dans $]0, \pi[$, et **indirecte** sinon.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **direct** (resp. **indirect**) si sa base l'est.

Définition 4

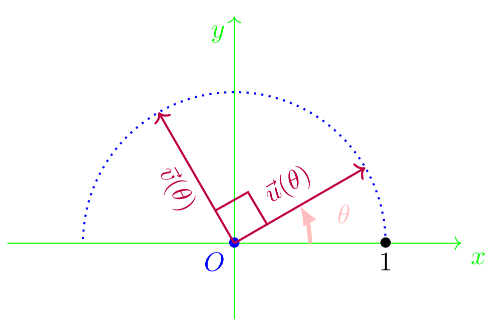
- On dit qu'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan est **orthonormale ou (orthonormée)** si $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont orthogonaux et si $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$.
- On dit qu'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan est **orthonormal ou (orthonormé)** si sa base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ l'est.

Proposition-Définition 2

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé directe du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = (\cos\theta)\,\vec{e}_1 + (\sin\theta)\,\vec{e}_2 \\ \vec{v}(\theta) = -(\sin\theta)\,\vec{e}_1 + (\cos\theta)\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

Alors, le couple $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est une base orthonormée du plan, appelée la **base polaire** associée à θ.



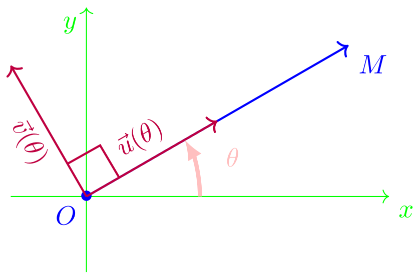
1.3 Coordonnées polaires

Proposition-Définition 3

On fixe un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan. Pour tout point M du plan distinct de l'origine, il existe un couple $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) \text{ avec } \vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2.$$

Le couple (r, θ) s'appelle un **couple de coordonnées polaires** de M.



Preuve. 1

Exercice 3 *Un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé, déterminer un couple de coordonnées polaires du point $M(1,1)$.*

Proposition 2

Un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé. Soit M un point du plan distinct de l'origine. Si (x, y) et (r, θ) sont respectivement les coordonnées cartésiennes et polaires de M alors :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta.$$

Preuve. 2

2 Barycentre

Définition 5

On appelle **point pondéré** du plan tout couple (M, λ) où M est un point du plan et λ un réel. Le nombre λ est appelé le **poids** ou la **masse** de M.

Proposition-Définition 4

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan $\mathcal{P}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0.$$

- On appelle **barycentre** des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ l'unique point G du plan vérifiant :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = 0.$$

  De plus, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \left(\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right).$$

  Ainsi, si pour tout $i \in [\![1, n]\!], (x_i, y_i)$ est le système des coordonnées cartésiennes de A_i, alors les coordonnées cartésiennes de G sont :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \text{ et } y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

- Si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ (et notamment si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$), G s'appelle **l'isobarycentre** des points $A_1, \ldots, A_n$ et, pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n} \left(\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} \right).$$

  De plus, si pour tout $i \in [\![1, n]\!], (x_i, y_i)$ est le système des coordonnées cartésiennes de A_i, alors les coordonnées cartésiennes de G sont :

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ et } y_G = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Exemples 2 *Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$.*

Exemples 3 *Construire le barycentre G des points pondérés $(A,-1), (B,1)$ et $(C,2)$.*

Exemples 4 *Construire l'isobarycentre de deux points A et B du plan.*

Exemples 5 *Construire l'isobarycentre de trois points A, B et C du plan.*

3 Produit scalaire

3.1 Définition

Définition 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls.} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \end{cases}$$

Proposition 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux } \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemples 6 *Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée du plan. Déterminer les produits scalaires $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ pour $i, j \in \{1, 2\}$.*

3.2 Propriétés du produit scalaire

Proposition 4

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ **(le produit scalaire est symétrique)**

$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w}$ **(le produit scalaire est linéaire à gauche)**

$\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w}$ **(le produit scalaire est linéaire à droite)**

Exemples 7 *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = -3$.
Calculer le produit scalaire $(2\vec{w} + 8\vec{v}) \cdot \vec{u}$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot (-2\vec{w} + 2\vec{v})$.*

3.3 Expression à l'aide des coordonnées dans une BON

Proposition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Preuve. 3

Exemples 8 *Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{w} \cdot \vec{u}$ où $\vec{u}(1, 2), \vec{v}(3, -2)$ et $\vec{w}(-1, 0)$.*

Corollaire 1

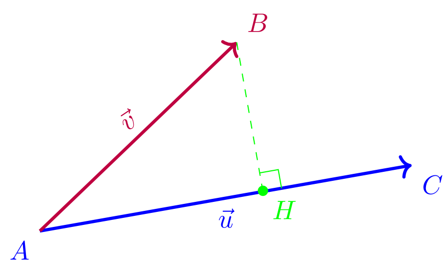
Si A et B sont deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans une **base orthonormée**, alors $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

3.4 Interprétation en termes de projection orthogonale

Proposition 6

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.
Si H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AH \times AC.$$



Preuve. 4

4 Déterminant

Dans cette partie, le plan supposé orienté.

4.1 Définition

Définition 7

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ ou $[\vec{u}, \vec{v}]$ et défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls.} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \end{cases}$$

Remarque 1 *On rappelle que $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne la mesure de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Exemples 9 *Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe. Calculer $\det(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$.*

Proposition 7

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \det(\vec{u},\vec{v}) = 0.$$

4.2 Propriétés du déterminant

Proposition 8

Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ des vecteurs du plan et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$\det(\vec{u},\vec{u}) = 0$.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$ **(le déterminant est antisymétrique)**

$\det(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{w}) + \mu\det(\vec{v},\vec{w})$ **(le déterminant est linéaire à gauche)**

$\det(\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{v}) + \mu\det(\vec{u},\vec{w})$ **(le déterminant est linéaire à droite)**

4.3 Expression à l'aide des coordonnées dans une BOND

Proposition 9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Alors

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

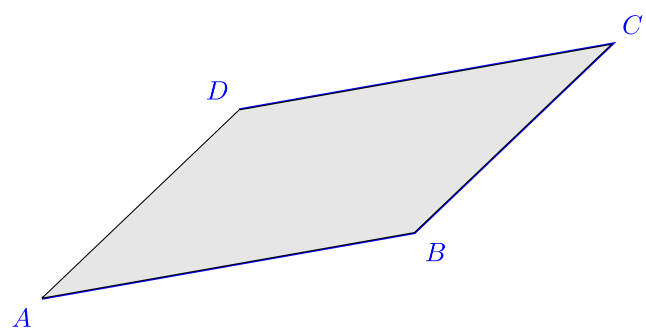
Preuve. 5

Exemples 10 *Calculer* $\det(\vec{u},\vec{v})$ *et* $\det(\vec{w},\vec{u})$ *où* $\vec{u}(2,1),\vec{v}(1,2)$ *et* $\vec{w}(1,1)$.

4.4 Interprétation géométrique

Proposition 10

- Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|.$$
- Soit $ABDC$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|.$$



5 Droites du plan

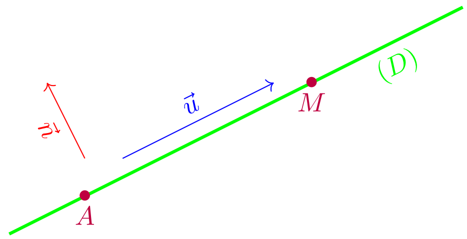
Dans toute la suite de ce chapitre, on donne les coordonnées dans un repère orthonormé direct du plan.

5.1 Différents moyens de définir un plan

Définition 8

Une droite dans le plan peut être définie par :

- La donnée d'un point A et d'un vecteur non nul $\vec{u}$. **La droite passant par A et dirigée par** $\vec{u}$ est alors l'ensemble des points M du plan tels $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire avec $\vec{u}$, i.e. qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
- La donnée de deux points A et B distincts. **la droite passante par ces deux points** est alors la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{n}$ normal. **La droite passante par A et de vecteur normal** $\vec{n}$ est alors l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} = 0$.



5.2 Équations paramétriques d'une droite

Proposition-Définition 5

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A(x_A, y_A)$ et dirigé par un vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$. Pour tout point $M(x, y)$ du plan, on a

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

Le système

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

est alors appelé une **équation paramétrique** ou un **système paramétrique** ou encore une **représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Exemples 11 *Soient les point $A(3, 4)$ et $B(5, 8)$ du plan.*
Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

5.3 Équations cartésiennes

Proposition-Définition 6

- Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\left(x_A, y_A\right)$ du plan et admettant le vecteur $\vec{n}(a, b)$ comme vecteur normal.
  Alors, pour tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) :
  $$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -ax_A - by_A.$$
  L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$.
- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, est une droite du plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$.

Exemples 12 *Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-3)$.*

Exemples 13 *Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-1,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,-2)$.*

5.4 Distance d'un point à une droite

Définition 9

Le projeté orthogonal d'un point M du plan sur une droite $\mathcal{D}$ est l'unique point H vérifiant :

$$H \in \mathcal{D} \text{ et } \overrightarrow{HM} \perp \mathcal{D}.$$

Théorème 1

Soient M un point du plan de coordonnées (x_M, y_M) et $\mathcal{D}$ une droit du plan. La distance de M à $\mathcal{D}$ est notée $d(M, \mathcal{D})$.

Si $\mathcal{D}$ passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si $\mathcal{D}$ passe par un point A et dirigé par un vecteur $\vec{u}$, alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left|\det\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)\right|}{\|\vec{u}\|}$$

Si $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemples 14 *Déterminer la distance du point $M(1,1)$ à la droite $\mathcal{D} : 2x + 3y - 1 = 0$.*

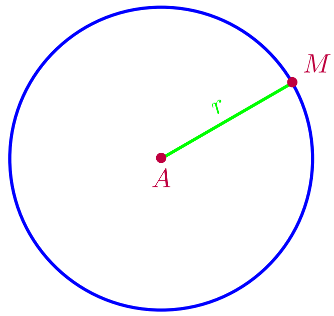
Exemples 15 *Déterminer de la distance du point $M(4,3)$ à la droite $\mathcal{D}$:* $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

6 Cercles du plan

6.1 Équations cartésiennes

Définition 10

Soient A un point de l'espace et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **cercle** de centre A et de rayon r l'ensemble noté $\mathcal{C}(A, r)$ des points M du plan tels que $AM = r$.



Proposition 11

Soient $A\,(x_A, y_A)$ un point du plan et $r \in \mathbb{R}_+$.
Alors, pour tout point $M(x, y)$ du plan :

$$M \in \mathcal{C}(A, r) \Longleftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

L'équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$ est alors appelée une **équation cartésienne du cercle** $\mathcal{C}(A, r)$.

Exemples 16 *Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre* $A(2, 1)$ *et de rayon* 3.

Proposition 12

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $M(x, y)$ des points du plan vérifiant :

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma = 0$$

est soit un cercle (éventuellement réduit à son centre) soit l'ensemble vide.

Preuve. 6

Exemples 17 *Déterminer l'ensemble* $\mathcal{A}$ *des points* $M(x, y)$ *tels que :* $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 8 = 0$

Exemples 18 *Déterminer l'ensemble* $\mathcal{B}$ *des points* $M(x, y)$ *tels que :*

$$x^2 + y^2 + 6x - y + 10 = 0.$$

6.2 Équation paramétrique d'un cercle

Proposition-Définition 7

Soient $A\,(x_A, y_A)$ un point du plan et $r \in \mathbb{R}_+$.
Alors, pour tout point $M(x, y)$ du plan :

$$M \in \mathcal{C}(A, r) \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + r\cos\theta \\ & & \\ y & = & y_A + r\sin\theta \end{array} \right.$$

Le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + r\cos\theta \\ & & \\ y & = & y_A + r\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

est alors appelé une **équation paramétrique** ou un **système paramétrique** ou encore une **représentation paramétrique** du cercle $\mathcal{C}(A, r)$.

Preuve. 7

LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

7 Transformations affines du plan

7.1 Translation

Définition 11

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ l'application qui à tout point M du plan associe le point M' du plan tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Proposition 13

Soit $\vec{u}(a,b)$ un vecteur du plan, $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan.
Alors, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$$

Cette expression s'appelle **l'expression analytique de la translation de vecteur** $\vec{u}$.

Preuve. 8

7.2 Homothétie

Définition 12

Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}$.
On appelle **homothétie de centre** Ω **et de rapport** k l'application qui à tout point M du plan associe le point M' du plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

Proposition 14

Soient $\Omega(a,b)$ un point du plan, $k \in \mathbb{R}$, $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan.
Alors, M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si, et seulement si,

$$\begin{cases} x' &= kx + (1-k)a \\ \\ y' &= ky + (1-k)b \end{cases}$$

Cette expression s'appelle **l'expression analytique de l'homothétie de centre Ω et de rapport** k.

Preuve. 9

7.3 Rotation

Définition 13

Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.
On appelle **rotation de centre Ω et d'angle** θ l'application qui à tout point M du plan associe le point M' donné par :

$$\Omega M' = \Omega M \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi].$$

Proposition 15

Soient $\Omega(a,b)$ un point du plan, $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(x,y), M'(x',y')$ deux points du plan.
Alors, M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ si, et seulement si,

$$\begin{cases} x' &= x_0 + (x-x_0)\cos\theta - (y-y_0)\sin\theta \\ \\ y' &= y_0 + (x-x_0)\sin\theta + (y-y_0)\cos\theta \end{cases}$$

Cette expression s'appelle **l'expression analytique de la rotation de centre Ω et d'angle** θ.

Preuve. 10