Chapitre 7 : Équations Différentielles

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

1.1 Définitions

Définition 1

- On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation différentielle de la forme
$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (E)$$
où $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.
- Une **solution** de cette équation différentielle est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I et vérifiant :
$$\forall x \in I, \quad a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x).$$
- La fonction c est appelée **second membre** de l'équation (E).
- **Résoudre** l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E).
- Si $c = 0$, l'équation différentielle (E) est dite **homogène** ou **sans second membre**.
- On appelle **équation homogène associée à** (E), l'équation différentielle obtenue en remplaçant le second membre de (E) par la fonction nulle sur I :
$$a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (E_H).$$
- (E) est dite **normalisée** ou **résolue en** y' si $a = 1$.

Exemples 1

1. *$(E) : y' + xy = x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisée.*
2. *$(E_H) : y' + xy = 0$ est l'équation homogène associée à (E).*
3. *La fonction constante $f : x \mapsto 1$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.*

1.2 Résolution de l'équation différentielle homogène normalisée

Théorème 1

Soient $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et A est une primitive de a sur I. Alors les solutions sur I de l'équation différentielle homogène normalisée

$$(E_H)\ :\ y' + a(x)y = 0$$

sont exactement les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda e^{-A(x)},\ \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Preuve. 1

Exercice 1 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle homogène* $(E_H) : y' + \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}y = 0$.

1.3 Forme générale des solutions de l'équation complète

Proposition 1

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.

Si y_p est une solution particulière de l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$, alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_p + y_h$ où y_h solution de l'équation homogène $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.

Ainsi, si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des solutions de (E_H), alors

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_h\ :\ y_h \in \mathcal{S}_H\}$$

Preuve. 2

Méthode

Pour résoudre l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$:

1. On cherche la solution générale de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation complète.
3. On exprime la solution générale : $y = y_p + y_h$.

Exemples 2 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle homogène* $(E) : y' + y = 1$.

1.4 Principe de superposition des solutions

Proposition 2

Si :

- y_1 est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$,
- y_2 est une solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Preuve. 3

Exercice 2 *Déterminer une solution (particulière) sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$(E) : y' + y = 2e^x + x + 1.$$

1.5 Détermination de solutions particulières : cas particuliers

Proposition 3

Soient $a, b, \alpha, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. Alors l'équation

$$y' + \alpha y = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

admet une solution particulière de la forme $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemples 3 *Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : y' + y = \cos(x)$.*

Proposition 4

Soient P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $m, \alpha \in \mathbb{K}$. Alors l'équation

$$y' + \alpha y = P(x)e^{mx}$$

admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{mx}$ où Q un polynôme.

Exemples 4 *Déterminer une solution particulière sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $(E) : y' + y = (x+1)e^x$.

1.6 Détermination de solutions particulières : cas général

Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions continues.
Rappelons que les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont exactement des fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de (E) de la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable inconnue.
Pour tout $x \in I$, on a

$y_p'(x) + a(x)y_p(x) =$
Alors

y_p est solution de $(E) \Longleftrightarrow$

Exercice 3 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :* $(E) : y' + 2xy = e^{x-x^2}$.

1.7 Problème de Cauchy

Définition 2

On appelle **problème de Cauchy** la recherche de solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$ vérifiant une **condition initiale** $y(x_0) = y_0$.

Théorème 2

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues et $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemples 5 *Déterminer la solution de* $(E) : y' + 2xy = e^{x-x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant la condition initiale* $y(0) = 1$.

1.8 Raccordements de solutions

Exercice 4 *On veut résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(E) : xy' + y = 1$.

1. ***Analyse :*** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une solution de l'équation* (E).
   (a) *Résoudre* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x > 0,\ f(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$.
   On montrerait de même qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x < 0,\ f(x) = 1 + \frac{\mu}{x}$.
   (c) *Que vaut* $f(0)$ *?*
   (d) *Dire pourquoi* f *est continue en* 0.
   (e) *Déduire que* $\lambda = \mu = 0$ *et que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$.

2. ***Synthèse :*** *Réciproquement, vérifier que* $f : x \mapsto 1$ *est solution de* (E). *Puis Conclure.*

2 Équation différentielle linéaire du second ordre

2.1 Définitions

Définition 3

1. On appelle **équation différentielle du second ordre à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme
$$(E) : y'' + ay' + by = c(x),$$
où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue.

2. Une **solution** de cette équation différentielle est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I et vérifiant :
$$\forall x \in I,\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x).$$

3. La fonction c est appelée **second membre** de l'équation (E).

4. Si $c = 0$, l'équation différentielle (E) est dite **homogène** ou **sans second membre**.

5. On appelle **équation homogène associée à** (E), l'équation différentielle obtenue en remplaçant le second membre de (E) par la fonction nulle :
$$(E_H) : y'' + ay' + by = 0.$$

6. On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation (E_H) l'équation du second degré :
$$r^2 + ar + b = 0$$
d'inconnue $r \in \mathbb{K}$.

2.2 Résolution de l'équation différentielle homogène

On cherche les solutions de l'équation différentielle homogène :

$$(E_H) : y'' + ay' + by = 0$$

où $a, b \in \mathbb{K}$.
Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant l'équation caractéristique associée à (E_H).

Théorème 3

1. **Cas 1 :** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

   - Sous cas 1 : Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes r_1 et r_2 et les solutions complexes de (E_H) sont les fonctions :

   $$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

   - Sous cas 2 : Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine complexe double r_0 et les solutions complexes de (E_H) sont les fonctions :

   $$x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{r_0 x} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. **Cas 2 :** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   - Sous cas 1 : Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions :

   $$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   - Sous cas 2 : Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine réelle double r_0 et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions :

   $$x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{r_0 x} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   - Sous cas 3 : Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \lambda + i\omega$ et $r_2 = \lambda - i\omega$ avec $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions :

   $$x \mapsto e^{\lambda x}(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)) \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 *Déterminer les solutions complexes de l'équation différentielle :*

$$(E_H) : y'' - (1+2i)y' + (i-1)y = 0.$$

Exercice 6 *Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle :*

$$(E_H) : y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Exercice 7 *Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle :*

$$(E_H) : y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2.3 Forme générale des solutions de l'équation complète

Proposition 5

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

Si y_p est une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = c(x)$, alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_p + y_h$ où y_h solution de l'équation homogène (E_H) : $y'' + ay' + by = 0$.

Ainsi, si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des solutions de (E_H), alors

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_h \ : \ y_h \in \mathcal{S}_H\}$$

Méthode

Pour résoudre l'équation $y'' + ay' + by = c(x)$:

On cherche la solution générale de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

On cherche une solution particulière de l'équation complète.

On exprime la solution générale : $y = y_p + y_h$.

Exercice 8 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : y'' - 3y' + 2y = 1$.

2.4 Principe de superposition des solutions

Proposition 6

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $c_1, c_2 : I \to \mathbb{K}$ continues.
Si :

- y_1 est solution de l'équation $(E_1) : y'' + ay' + by = c_1(x)$,
- y_2 est solution de l'équation $(E_2) : y'' + ay' + by = c_2(x)$,

alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de $(E) : y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x)$.

Exercice 9 *Déterminer une solution particulière l'équation différentielle*

$$(E) : y'' + y = 2\cosh x - 3\cos 2x.$$

2.5 Détermination de solutions particulières

Théorème 4

Soient $a, b, m \in \mathbb{K}$ et P une fonction polynomiale. Alors l'équation

$$(E) : y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$$

admet une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto Q(x)e^{mx}$ où Q est une fonction polynomiale.

Exercice 10 *Déterminer une solution particulière de l'équation* $(E) : y'' - 2y' + y = (x+3)e^{-x}$.

Proposition 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe continue.
Si $z : I \to \mathbb{C}$ est une solution complexe de $y'' + ay' + by = c(x)$, alors :

- $Re(z)$ est solution de : $y'' + ay' + by = Re(c(x))$,
- $Im(z)$ est solution de : $y'' + ay' + cy = Im(c(x))$.

Exercice 11 *Déterminer une solution particulière de l'équation* $(E) : y'' + y = x\cos(2x)$.

2.6 Problème de Cauchy

Définition 4

On appelle **problème de Cauchy** la recherche de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre $y'' + ay' + by = c(x)$ vérifiant les **conditions initiales** $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Théorème 5

Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Alors le problème de Cauchy

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} y'' + ay' + by = c(x) \\ \\ y(x_0) = y_0 \\ \\ y'(x_0) = y_1 \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

Exercice 12 *Déterminer la solution de* $(E) : y'' - 2y' + y = (x+1)e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions initiales* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.