

Chapitre 6 : Primitives et Calcul Intégral (1)

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- (b) I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1 Primitives d'une fonction continue

1.1 Définition et propriétés

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle **primitive** de la fonction f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I et vérifiant $F' = f$.

Remarque 1 Une primitive est dérivable par définition.

Exemples 1 (a) $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$.

(b) $\ln$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Proposition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction possédant une primitive F sur I . Alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$.

Donc, si G est une primitive de f sur I alors il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que : $G = F + c$.

Preuve. 1

Corollaire 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction possédant une primitive sur I . On se donne aussi $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

Exemples 2 $\ln$ est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Notation

Étant donnée une fonction continue f , on désigne par $\int f(x)dx$, ou parfois plus simplement par $\int f$, une primitive de f .

Exemples 3 Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on a $\int f'(x)dx = f(x)$.

Proposition 2

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (a) Si F et G sont primitives de f et g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- (b) Si F est primitive de f , alors λF est une primitive de λf .

Proposition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Si F est primitive de f , alors $Re(F)$ est une primitive de $Re(f)$ et $Im(F)$ est une primitive de $Im(f)$.

1.2 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Ensemble de définition
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$

$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

1.3 Techniques usuelles de primitivation

On rappelle la formule de dérivation d'une composée de fonctions dérivables

$$(F \circ u)' = u' \times F' \circ u$$

On en déduit que si F est une primitive de f , alors $F \circ u$ est une primitive de $u' \times f \circ u$. En particulier, on a :

(a) $\int u'(x).u(x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) \ (\alpha \neq -1).$

(b) $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(|u(x)|).$

(c) $\int u'(x).e^{u(x)} dx = e^{u(x)}.$

(d) $\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = \arctan(u(x)).$

(e) $\int u'(x). \cos(u(x)) dx = \sin(u(x)).$

(f) $\int u'(x). \sin(u(x)) dx = -\cos(u(x)).$

Exercice 1 Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \exp(e^x + x)$.

Exercice 2 Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \tanh(x)$.

Exercice 3 Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^4(x)}$.

Exercice 4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$.

Exercice 5 (Cas de $\Delta < 0$) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$.

Exercice 6 (Cas de $\Delta > 0$) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Exercice 7 (Cas de $\Delta = 0$) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$.

1.4 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1: (Théorème fondamental de l'analyse)

Toute fonction f continue sur I admet des primitives sur I .

Exercice 8 La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ admet une primitive, mais on pourra montrer qu'il est impossible de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Définition

Proposition-Définition 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, F une primitive (quelconque) de f et $a, b \in I$. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F . Ce nombre est appelé **l'intégrale de f de a à b** et est noté $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$.

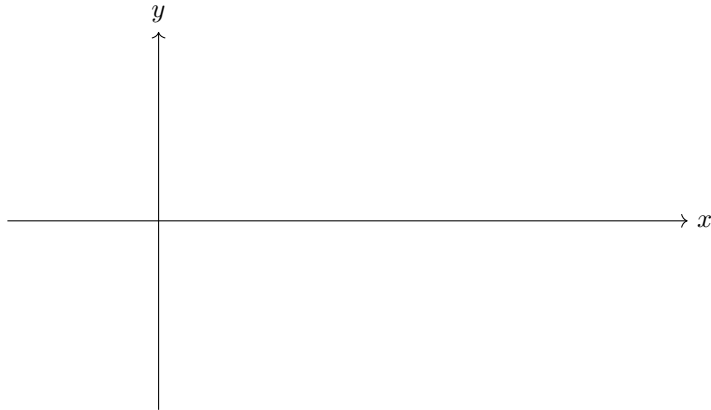
Preuve. 2

Remarque 2 (a) La différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_{t=a}^{t=b}$ ou $[F]_a^b$.

(b) La variable t est **muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \dots$$

(c) Interprétation géométrique : l'intégrale de f sur $[a, b]$ représente l'aire algébrique de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exercice 9 (a) $\int_0^1 t^n dt =$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt =$

(c) $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt =$

Proposition 4

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$. Alors $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Exercice 10 (Une fonction définie par une intégrale) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_{x^3}^{e^x} f(t) dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g' .

2.2 Propriétés

Proposition 5

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues, $a, b, c \in I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (a) $\int_a^a f(t)dt = 0$.
- (b) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
- (c) $\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
- (d) $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
- (e) **Relation de Chasles** : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Exercice 11 Calculer l'intégrale $\int_{-2}^2 |x - 1|dx$.

Proposition 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

- (a) **Positivité de l'intégrale** : si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- (b) **Croissance de l'intégrale** : si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- (c) **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Exercice 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

- (1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
- (2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- (3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Proposition 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive** sur le segment $[a, b]$.

(a) Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors la fonction f est nulle sur le segment $[a, b]$:

$$\forall t \in [a, b], f(t) = 0.$$

(b) Si f n'est pas nulle sur le segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt > 0.$$

2.3 Intégration par parties

Définition 2

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et f' est continue sur I .

Théorème 2

Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a, b \in I$.

(a) **Version intégrale :**

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

(b) **Version primitive :** sur l'intervalle I , on a

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Preuve. 3

Exercice 13 Calculer l'intégrale $\int_0^1 (t+1)e^t dt$.

Exercice 14 Calculer l'intégrale $\int_0^\pi e^t \cos(t) dt$.

Exercice 15 Déterminer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16 Déterminer une primitive de la fonction $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

2.4 Changement de variable

Théorème 3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in J$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Preuve. 4

Méthode du changement de variable

Pour calculer $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$ en utilisant le changement de variable :

- On pose $x = \varphi(t)$.
- On a alors $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, puis $dx = \varphi'(t)dt$.
- Enfin on détermine les bornes : pendant que t varie de a à b , $x = \varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Exercice 17 Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$ en posant $x = e^t$.

Exercice 18 Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin(t)$.