

Chapitre 5 : Calcul Algébrique

1 Notation Σ et Π

Définition 1

Soient $a_p, a_{p+1}, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ avec $p \leq n$. On pose :

$$\sum_{i=p}^n a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

Plus généralement si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie de nombres complexes (i.e. I est fini), on pose :

$$\sum_{i \in I} a_i = \text{somme de tous les nombres de la famille } (a_i)_{i \in I}.$$

Lorsque $I = \emptyset$, on pose par convention $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$.

Remarque 1 (1) L'indice i est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs :

$$\sum_{i=p}^n a_i = \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{\alpha=p}^n a_\alpha = \dots$$

(2) Le nombre de termes de la somme $\sum_{k=p}^n a_k$ est $n - p + 1$.

(3) De la même manière, on pose :

$$\prod_{i=p}^n a_i = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n.$$

Exercice 1 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Calculer $\sum_{k=p}^n \alpha$.

2 Sommes usuelles

Proposition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- (i) $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$
- (ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
- (iii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$

Preuve. 1 *Par récurrence sur n .*

Proposition 2: (Somme géométrique)

Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Plus généralement, si p et n sont deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$, alors :

$$q^p + q^{p+1} + \cdots + q^n = \sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

3 Propriétés

Proposition 3

Soient $a_p, \dots, a_n$ et $b_p, \dots, b_n$ et λ des nombres réels ou complexes.

(1) **La linéarité de la somme :**

$$\sum_{k=p}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k \text{ et } \sum_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^n a_k.$$

(2) **Relation de Chasles :** si $p \leq m < n$, alors

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k$$

(3) **Inégalités :** si : $\forall k \in \llbracket m, n \rrbracket, a_k \leq b_k$, alors $\sum_{k=p}^n a_k \leq \sum_{k=p}^n b_k$.

(4) **Inégalité triangulaire :** $\left| \sum_{k=p}^n a_k \right| \leq \sum_{k=p}^n |a_k|$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n k(k+2)$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{2n} \min(k, n)$.

4 Changement d'indice

Exercice 5 On a

$$\sum_{k=0}^n a_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell}.$$

On dit alors qu'on a effectué **le changement d'indice** $\ell = k + 1$. Cela revient à remplacer tous les k de la somme initiale par des $\ell - 1$. Mais il faut aussi changer les bornes :

k	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
ℓ	1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$

Exercice 6 On a

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_{k-2} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$

On a alors effectué le changement d'indice $j = k - 2$:

k	2	3	4	$\cdots$	n	$n+1$
j	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

Exercice 7 Soit n un entier naturel impair. En utilisant le changement d'indice $\ell = n - k$, montrer que la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k(n-k)}$ est nulle.

Posons $\ell = n - k$. On a

k	1	2	3	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
ℓ				$\cdots$		

Propriétés 1

Soient $p \leq n$ deux entiers naturels et $a_p, \dots, a_n$ des nombres complexes. Alors,

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p}^n a_{n-k+p}$$

5 Sommes et produits télescopiques

Proposition 4

Soit $(z_k)_{m \leq k \leq n+1}$ une famille de nombres complexes.

(i) **Somme télescopique** : $\sum_{k=p}^n (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_p.$

(ii) **Produit télescopique** : $\prod_{k=p}^n \frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{z_{n+1}}{z_p}.$

Preuve. 2

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right).$

6 Séparation des indices pairs et impairs

Proposition 5

Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{0 \leq 2p \leq n} a_{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} a_{2p+1}.$$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k.$

7 Factorielle, coefficients binomiaux

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. C'est **factorielle** de n .
Par convention, on pose $0! = 1$.

Exercice 10 $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Définition 3

Soient $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On appelle (**coefficient binomial**) k parmi n , noté $\binom{n}{k}$, le nombre défini par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 11 $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n} = 1$.

Proposition 6

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

- (1) **Formule de symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- (2) **Formule de Pascal** : $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Remarque 2 La relation de Pascal permet de calculer par récurrence les coefficients binomiaux. C'est le *triangle de Pascal*

8 Formule du binôme de Newton

Théorème 1: (Formule du binôme de Newton)

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0.$$

Preuve. 3

Exercice 12 (1) $(a + b)^2 =$

(2) $(a + b)^3 =$

(3) $(a + b)^4 =$

Exercice 13 (1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} =$

(2) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} =$

9 Formule de Bernoulli

Proposition 7

Soient $a, b \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a la **formule de Bernoulli** :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

c'est-à-dire

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

Exercice 14 (1) $a^2 - b^2 =$

(2) $a^3 - b^3 =$

(3) $a^3 + b^3 =$

(4) $a^4 - b^4 =$

10 Sommes doubles

Définition 4

On considère le tableau suivant des nombres complexes :

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1m} \\
 x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2m} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{im} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nm}
 \end{array}$$

La somme des éléments de ce tableau est appelée **somme double** et notée $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{ij}$.

Remarque 3 Si $n = m$, on peut écrire $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij}$ au lieu de $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_{ij}$.

Proposition 8: (Théorème de Fubini)

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} \right).$$

Preuve. 4

Exercice 15 Calculer la somme double : $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq m}} (k + \ell)$.

Corollaire 1

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_m$ des nombres complexes. On a

$$(1) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m y_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i y_j.$$

$$(2) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j.$$

Exercice 16 Calculer la somme double : $\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} 2^{i+j}$.

11 Sommes triangulaires

Définition 5

On considère le tableau suivant des nombres complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} & \\
 & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} & \\
 & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
 & & & x_{ij} & \dots & x_{in} & \\
 & & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & & x_{nn} &
 \end{array}$$

La somme des éléments de ce tableau est appelée **somme triangulaire** et notée $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{ij}$.

Proposition 9

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j x_{ij} \right).$$

On a aussi :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n x_{ij} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} \right).$$

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme triangulaire : $\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} k\ell$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme triangulaire : $\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{\ell}$.

Corollaire 2

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres complexes.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Preuve. 5

Exercice 19 Développer $(a + b + c)^2$.