

Chapitre 4 : Fonctions usuelles

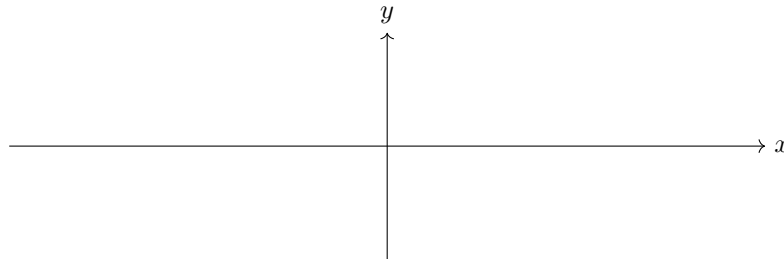
Partie II

1 Fonctions circulaires réciproques

1.1 Fonction arc sinus

Rappels

1. La fonction sin est impaire et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
3. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\sin' = \cos$.
4. Graphe de la fonction sin :



Proposition 1

La fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction **arc sinus** et se note **arcsin**.

Remar 1 (1) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall y \in [-1, 1], \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$.

(2) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin x) = x$.

(3) $\forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin y) = y$.

Exercice 1 Calculer $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(1/2)$, $\arcsin(\sin \frac{\pi}{4})$ et $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{3})$.

Théorème 1

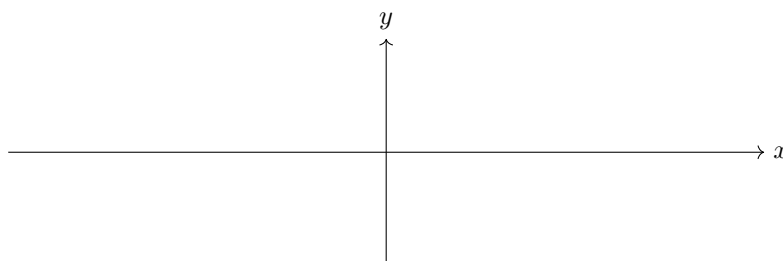
- (1) La fonction arcsin est impaire.
- (2) La fonction arcsin est continue sur $[-1, 1]$, mais elle n'est dérivable que sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1.2 Fonction arc cosinus

Rappels

1. La fonction $\cos$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
3. La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\cos' = -\sin$.
4. Graphe de la fonction $\cos$:



Proposition 2

La fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction **arc cosinus** et se note **arccos**.

Remar 2 (1) $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1], \cos(x) = y \iff x = \arccos(y)$.

(2) $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$.

(3) $\forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos y) = y$.

(4) La fonction $\arccos$ n'est paire ni impaire.

Exercice 2 Calculer $\arccos(0)$, $\arccos(1)$, $\arccos(\sqrt{3}/2)$, $\arccos(\cos \frac{\pi}{3})$ et $\arccos(\cos \frac{5\pi}{3})$.

Théorème 2

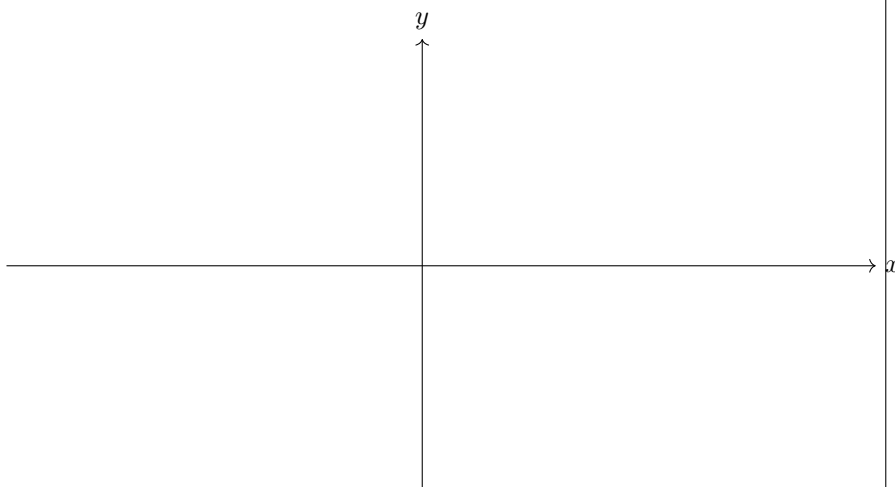
La fonction $\arccos$ est continue sur $[-1, 1]$, mais elle n'est dérivable que sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1.3 Fonction arc tangente

Rappels

1. La fonction $\tan$ est impaire et elle est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$.
3. La fonction $\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}$ et on a : $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.
4. Graphe de la fonction $\tan$:



Proposition 3

La fonction $\tan$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Sa réciproque s'appelle la fonction **arc tangente** et se note $\arctan$.

Remar 3 (1) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \tan x = y \iff x = \arctan y$.

(2) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan x) = x$.

(3) $\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan y) = y$.

Exercice 3 Calculer $\arctan(0)$, $\arctan(1)$, $\arctan(\sqrt{3})$, $\arctan\left(\tan \frac{\pi}{5}\right)$ et $\arctan\left(\tan \frac{5\pi}{3}\right)$.

Théorème 3

- (1) La fonction $\arctan$ est impaire.
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
- (3) La fonction $\arctan$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 1

Les fonctions **sinus hyperbolique** (notée sh ou sinh) et **cosinus hyperbolique** (notée ch ou cosh) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Proposition 4

- (1) La fonction $\sinh$ est impaire.
- (2) La fonction $\cosh$ paire.
- (3) Les fonctions $\sinh$ et $\cosh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec : $\sinh' = \cosh$ et $\cosh' = \sinh$.

Proposition 5

Pour tout réel x on a : $\cosh x + \sinh x = e^x$, $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$ et $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

2.2 La fonction tangente hyperbolique

Définition 2

La fonction **tangente hyperbolique**, notée th ou $\tanh$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Remar 4 On a $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh x > 0$, ce qui prouve que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6

La fonction $\tanh$ est impaire et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

3 Fonctions hyperboliques réciproques

3.1 Fonction arc sinus hyperbolique

Proposition 7

La fonction $\sinh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sa réciproque s'appelle la fonction **arc sinus hyperbolique** et se note **arcsinh**.

Remar 5 (1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sinh x = y \iff x = \operatorname{arcsinh} y$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arcsinh}(\sinh x) = \sinh(\operatorname{arcsinh} x) = x$.

Proposition 8

(1) $\operatorname{arcsinh}$ est impaire.

(2) La fonction $\operatorname{arcsinh}$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3.2 Fonction arc cosinus hyperbolique

Proposition 9

La fonction $\cosh$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$. Sa réciproque s'appelle la fonction **arc cosinus hyperbolique** et se note **arccosh**.

Remar 6 (1) $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[, \cosh x = y \iff x = \operatorname{arccosh} y.$

(2) $\forall x \in [0, +\infty[, \operatorname{arccosh}(\cosh x) = x.$

(3) $\forall x \in [1, +\infty[, \cosh(\operatorname{arccosh} x) = x.$

Proposition 10

La fonction $\operatorname{arccosh}$ est continue sur $[1, +\infty[$, mais elle n'est dérivable que sur $]1, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3.3 Fonction arc tangente hyperbolique

Définition 3

La fonction $\tanh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$. Sa réciproque s'appelle la fonction **arc tangente hyperbolique** et se note **arctanh**.

Remar 7 (1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in] -1, 1[, \tanh x = y \iff x = \operatorname{arctanh} y.$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctanh}(\tanh x) = x.$

(3) $\forall x \in] -1, 1[, \tanh(\operatorname{arctanh} x) = x.$

Proposition 11

(1) $\operatorname{arctanh}$ est impaire.

(2) La fonction $\operatorname{arctanh}$ est dérivable (donc continue) sur $] -1, 1[$ et on a

$$\forall x \in] -1, 1[, \operatorname{arctanh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$