

Chapitre 25: Représentations Matricielles

1 Représentations matricielles

1.1 Représentation matricielle d'un vecteur

Définition 1: (Matrice d'un vecteur dans une base)

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle **matrice de x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne de taille n , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

avec $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$.

Exemples 1 Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

Soit $P = 4X^3 + 3X^2 - 2X - 5$ vecteur de E .

$$\text{Alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 Considérons $E = \mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique

$\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$.

Soit $x = (-6, 3, 4)$ vecteur de E .

On a $x = -6e_1 + 3e_2 + 4e_3$.

Exprimer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

1.2 Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Définition 2

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de taille $n \times p$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, formée des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & & x_j & & x_p \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \\ \leftarrow e_i \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

avec $x_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n$

Exemples 2 Considérons $E = \mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique

$\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$.

Soient $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 0, 1)$, $x_3 = (1, 0, -1)$ et $x_4 = (-1, 1, 1)$ vecteurs de E .

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ x_2 = 2e_1 + 0e_2 + e_3 \\ x_3 = e_1 + 0e_2 - e_3 \\ x_4 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{array} \right.$$

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) & \leftarrow e_1 & & & & & \\ & & \leftarrow e_2 & & & & \\ & & & \leftarrow e_3 & & & \end{array}$$

Exercice 2 Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Soient $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X$, $P_2 = 1 + 2X + X^2$ et $P_3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$ vecteurs de E . Exprimer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

1.3 Matrice d'une application linéaire

Définition 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives p et n . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ des bases respectives de E et F . Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice de taille $n \times p$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) := \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p)).$$

Autrement dit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{array}{cccccc} & u(e_1) & u(e_2) & & u(e_j) & & u(e_p) & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \\ \leftarrow f_i \\ \\ \leftarrow f_n \end{array} \end{array}$$

avec $u(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{ij}f_i + \dots + a_{nj}f_n$.

Si $E = F$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est simplement notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et on parle de la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples 3 Soient :

- $E = \mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$;
- $F = \mathbb{K}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (f_1 = (1, 0), f_2 = (0, 1))$;
- $u : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$ l'application linéaire définie par $u(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y)$.

Formons la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Pour cela on calcule les images des vecteurs de la base de départ :

- $u(e_1) = u(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2$,
- $u(e_2) = u(0, 1, 0) = (2, -1) = 2f_1 - f_2$,
- $u(e_3) = u(0, 0, 1) = (-1, 0) = -f_1 + 0f_2$.

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix}$$

Exemples 4 Soit $u : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ l'endomorphisme défini par $u(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$. Formons la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ de $\mathbb{K}^3$. On a

- $u(e_1) = (0, 1, 1) = e_2 + e_3$;
- $u(e_2) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$;
- $u(e_3) = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$.

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix}$$

Exercice 3 Soient :

- $E = \mathbb{K}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$;
- $F = \mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$;
- $u : \mathbb{K}_3[X] \rightarrow \mathbb{K}^3$ l'application linéaires définie par $u(P) = (P(1), P(2), P(3))$.

Exprimer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exemples 5 (*À retenir*) Si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(e_1), \dots, \text{Id}_E(e_n)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = I_n.$$

2 Application du calcul matriciel aux applications linéaires

2.1 L'isomorphisme de représentation matricielle

Théorème 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives p et n , $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F .

$$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi :

- Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u + v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(v)$.
- Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\lambda u) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$.

Corollaire 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

Exemples 6 $\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim E)^2$ et $\dim E^* = \dim E$.

Définition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **l'application linéaire canoniquement associée** à A , l'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont A est sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4 Déterminons u l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Image d'un vecteur

Proposition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soient en outre $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$. Si on pose $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(y)$, alors :

$$y = u(x) \iff Y = UX.$$

Remarque 1 • $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$.

- La proposition précédente indique aussi comment trouver l'expression analytique d'une application linéaire associée à une matrice.

Exemples 7 On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé

à A .

Déterminer f .

2.3 Composition d'applications linéaires

Théorème 2

Soient E , F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ des bases respectives de E , F , G . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f).$$

Corollaire 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^k.$$

Exemples 8 Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une certaine base de E alors :

- u est nilpotent $\iff A$ est nilpotente.

► u est un projecteur $\iff A^2 = A$.

► u est une symétrie $\iff A^2 = I_n$.

2.4 Isomorphisme et matrice inversible

Théorème 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit en outre $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors u est bijective si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ est inversible, et dans ce cas :

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u^{-1}).$$

Corollaire 3

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$u \in \text{GL}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

De plus, si tel est le cas :

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}).$$

3 Formules de changement de base

3.1 Matrice de passage

Définition 5

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Exemples 9 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 &= e_2 - e_3 \\ e'_3 &= -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases}$$

On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B}'$ est libre donc une base de E .

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix} \end{array}$$

Proposition 2

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.
On en déduit que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et que $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Preuve 1 • $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(\mathcal{B}')) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

• Puisque Id_E est bijective, alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ est inversible et

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = (\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_E^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_E) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

Exemples 10 Reprenons les notations de l'exemple précédent

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e'_1 & = & e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 & = & e_2 - e_3 \\ e'_3 & = & -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons P^{-1} .

3.2 Formules de changement de base

Proposition 3: (Changement de base pour les vecteurs)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $x \in E$.
On pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Alors $X = PX'$.

Remarque 2 On retient $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.

Proposition 4: (Changement de base pour les applications linéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit également F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$. Alors $A' = Q^{-1}AP$.

Proposition 5: (Changement de base pour les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors $A' = P^{-1}AP$.

Remarque 3 On retient : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

4 Noyau, image et rang d'une matrice

4.1 Noyau et image

Définition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle **noyau de la matrice** A le sev de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ suivant :

$$\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : AX = 0\}.$$

- On appelle **image de la matrice** A le sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ suivant :

$$\text{Im } A = \{AX : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}.$$

Remarque 4 Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \ker(u) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \ker A.$$

Ainsi en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\ker(A) = \ker(u)$. De même :

$$(y_1, \dots, y_n) \in \text{Im}(u) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \text{Im } A.$$

Ainsi en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\text{Im}(A) = \text{Im}(u)$.

Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible;
- (ii) $\ker A = \{0_{n,1}\}$, i.e. : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}$;
- (iii) $\text{Im } A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e. : $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX$.

Preuve 2 Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associée à A .
En identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $\ker A = \ker u$ et $\text{Im } A = \text{Im } u$.
Ainsi :

A est inversible $\iff u$ est bijective

$\iff u$ est injective $\iff \ker u = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff \ker A = \{0_{n,1}\}$

$\iff u$ est surjective $\iff \text{Im } u = \mathbb{K}^n \iff \text{Im } A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Exemples 11 Étudions l'inversibilité de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Rang

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de la matrice A , noté $\text{rg } A$, le rang de la famille des vecteurs colonnes de A . Autrement dit :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p),$$

où $C_1, C_2, \dots, C_p$ désignent les colonnes de A .

Remarque 5

$\text{rg}(A) = 0 \iff \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) = 0 \iff \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \{0\} \iff C_1 = \dots = C_p = 0 \iff A = 0$.

Exemples 12 Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 7: (Rang d'une matrice échelonnée)

Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses pivots.

Exemples 13 Déterminons le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque A est une matrice échelonnée ayant trois pivots, alors $\text{rg}(A) = 3$.

Proposition 8: (Rang d'une famille de vecteurs et de sa matrice)

Soient $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille vecteurs de E . Alors

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

Exemples 14 Soient $u = (3, 0, 0)$, $v = (5, 2, 0)$ et $w = (1, -2, 3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons le rang de la famille (u, v, w) .

Notons $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Formons la matrice de la famille (u, v, w) dans la base $\mathcal{B}$.

On a

- $u = 3e_1$
- $v = 5e_1 + 2e_2$
- $w = e_1 - 2e_2 + 3e_3$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\text{rg}(u, v, w) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w)) = 3$ car il s'agit d'une matrice échelonnée avec trois pivots.

Proposition 9: (Rang d'une application linéaire et de sa matrice)

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)).$$

Exemples 15 Déterminons le rang de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y, z) = (3x + 2y - z, -y + z)$.

Proposition 10: (Rang et inversibilité)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

Exemples 16 • La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\text{rg}(A) = 3 =$ la taille.

- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\text{rg}(B) \neq 4$.

Proposition 11: (Invariance du rang par transposition)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$.

Exemples 17 Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On a ${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée ayant trois pivot.

Donc $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A) = 3$.

Corollaire 4

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $B \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$.
- Si $B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A)$.

Remarque 6 On ne modifie pas le rang d'une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.

5 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

5.1 Opérations élémentaires et pivot de Gauss

Commençons par des rappels du Chapitre 17 : Calcul Matriciel.

Définition 8

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les opérations suivantes :

- échange de deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul α , notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre, notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes :

- échange de deux colonnes, notée $C_i \leftrightarrow C_j$;
- multiplication d'une colonne par un scalaire non nul α , notée $C_i \leftarrow \alpha C_i$;
- addition d'un multiple d'une colonne à une autre, notée $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

Définition 9: (Matrices équivalentes par lignes/colonnes)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dit que les matrices A et B sont **équivalentes par lignes** (resp. **colonnes**), et on note $A \stackrel{L}{\sim} B$ (resp. $A \stackrel{C}{\sim} B$), si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes).

Proposition 13

Tout matrice est équivalente par lignes (resp. colonnes) à une matrice échelonnée.

Exemples 18 On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\stackrel{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{matrix}$$

Donc la matrice A est équivalente par ligne à la matrice échelonnée $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5.2 Interprétation matricielle

Proposition 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose :

$$P_{ij} = E_{ij} + E_{ji} + I_n - E_{ii} - E_{jj}, \quad D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii} \quad \text{et} \quad T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}.$$

Pour une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à la multiplication à gauche par P_{ij} ;
- l'opération $L_i \leftrightarrow \alpha L_i$ correspond à la multiplication à gauche par $D_i(\alpha)$;
- l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $T_{ij}(\alpha)$.

Pour une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:

- l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ correspond à la multiplication à droite par P_{ij} ;
- l'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ correspond à la multiplication à droite par $D_i(\alpha)$;
- l'opération $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$ correspond à la multiplication à droite par $T_{ij}(\alpha)$.

Ces matrices sont appelées des matrices élémentaires.

Remarque 7 • Les P_{ij} sont dites des matrices de permutation.

- Les $D_i(\alpha)$ sont dites des matrices de dilatation.
- Les $T_{ij}(\alpha)$ sont dites des matrices de transvection.

Remarque 8 Ces matrices sont inversibles : $[P_{ij}]^{-1} = P_{ij}$, $[D_i(\alpha)]^{-1} = D_i(1/\alpha)$ et $[T_{ij}(\alpha)]^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$.

Proposition 15

- (i) Les opérations élémentaires sur les **colonnes** d'une matrice laissent son **image** inchangée.
- (ii) Les opérations élémentaires sur les **lignes** d'une matrice laissent son **noyau** inchangé.
- (iii) Les opérations élémentaires sur les **lignes ou colonnes** d'une matrice laissent son **rang** inchangé.

Exemples 19 Calculons le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\stackrel{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\text{Donc } \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \text{ En particulier } A \text{ n'est pas inversible.}$$