

Chapitre 24: Applications Linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition et premiers exemples

1.1 Définition

Définition 1: (Application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \rightarrow F$ vérifiant :

- (i) $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Cette définition est équivalente à la suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

- Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme** de E . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelé une **forme linéaire** de E . L'ensemble des formes est linéaire est noté par E^*

Remarque 1 • Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.
Par contraposée, si $f(0_E) \neq 0_F$, alors $f : E \rightarrow F$ n'est pas linéaire.

- Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire et si $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs de E alors

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

1.2 Exemples

Exemples 1 Soit $f : E \rightarrow F$ définie par $f : x \mapsto 0_F$.
Alors f est une application linéaire et est appelée l'**application linéaire nulle**.

Exercice 1 Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, 2y)$ est une application linéaire.

Exercice 2 Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + z$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Montrer que l'application $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par $D : P \mapsto P'$ est un endomorphisme.

Exemples 2 Soit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $I : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est une forme linéaire de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1.3 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 1

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

(i) Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{L}(E, F), \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F).$$

En particulier la somme de deux applications linéaires est une application linéaire.

(ii) La composée d'applications linéaires est linéaire:

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

(iii) La composition à gauche et à droite sont linéaire:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g, h \in \mathcal{L}(F, G), (\lambda g + \mu h) \circ f = \lambda g \circ f + \mu h \circ f$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{L}(E, F), \forall h \in \mathcal{L}(F, G), h \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda h \circ f + \mu h \circ g.$$

Corollaire 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 2: (Puissance d'un endomorphisme)

Si $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme, on pose $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^0 = \text{Id}_E$.

Définition 3: (Endomorphisme nilpotent)

On dit qu'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exemples 3 Soit $D : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$ l'endomorphisme définie par : $D(P) = P'$.
Montrer que f est nilpotent.

Proposition 2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$, et $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Formule du binôme de Newton : $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$.
- (ii) Formule de Bernoulli : $f^n - g^n = (f - g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1} \right)$.

1.4 Isomorphismes

Définition 4: (Isomorphisme)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- On appelle **isomorphisme** de E sur F toute application $f : E \rightarrow F$ linéaire et bijective.
- Un isomorphisme de E sur E est appelé un **automorphisme** de E .
- On dit que E est **isomorphe** à F ou que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E sur F .

Exemples 4 Montrer que l'application $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}_2[X]$ définie par $f(a, b, c) = aX^2 + bX + c$ est un isomorphisme.

Proposition 3

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- (i) Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G , alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G .
- (ii) Si f est un isomorphisme de E sur F , f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

Définition 5: (Groupe linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est appelé le **groupe linéaire** de E et est noté $\text{GL}(E)$.

1.5 Différentes définitions d'une application linéaire

Proposition 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F .

Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = f_i.$$

Ainsi une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Exemples 5 On sait que la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer donc l'unique l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$f(1, 0, 0) = (1, 1), f(0, 1, 0) = (1, -1), f(0, 0, 1) = (1, 0).$$

Proposition 5

Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de supplémentaires dans E , i.e. $E = E_1 \oplus E_2$. Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F$ deux applications linéaires.

Alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$.

2 Images directe et réciproque par une application linéaire

2.1 Images directe et réciproque d'un sev

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) Si A est un sev de E , alors **l'image directe de A par f** définie par

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

est un sous-espace vectoriel de F .

- (ii) Si B est un sev de F , alors **l'image réciproque de B par f** définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition-Définition 1: (Noyau et image d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) Le **noyau** de l'application linéaire f , noté $\ker f$, est défini par

$$\ker f := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

- (ii) L'**image** de f , notée $\operatorname{Im} f$, est définie par

$$\operatorname{Im} f := f(E) = \{f(x) : x \in E\} = \{y \in F : \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de F .

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$.
(ii) f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = F$.

Exemples 6 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - x - z).$$

1. Donner une base de $\ker f$ et sa dimension. f est-elle injective ?
2. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Dédurre que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. f est-elle surjective ?

Proposition 8: Résolution des équations sur E

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ est :

- L'ensemble vide si $b \notin \text{Im}(u)$.
- $x_0 + \ker(u)$, avec x_0 est une solution particulière.

2.3 Image d'une famille de vecteurs

Proposition 9

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , alors la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est génératrice $\text{Im } f$.

Exemples 7 Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y).$$

Déterminer une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Théorème 1

L'image d'une base de E par un isomorphisme $f : E \rightarrow F$ est une base de F .

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Isomorphisme et dimension

Proposition 10

Deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes **si et seulement si** ils ont la même dimension.

Exemples 8 • $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes.

- Plus généralement tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang** de f la dimension de $\text{Im } f$ et on la note $\text{rg } f$.

On dit alors que f est de **rang fini** si $\text{Im } f$ est de dimension finie.

Exemples 9 Déterminer le rang de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - x - z).$$

Exemples 10 $\text{rg}(f) = 0 \iff \dim(\text{Im } f) = 0 \iff \text{Im } f = \{0_F\} \iff \forall x \in E, f(x) = 0_F \iff f = 0$.

Théorème 2

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g).$$

De plus, si f surjective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$ et si g injective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$.

Proposition 11

Soient E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- (i) Si f est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$.
- (ii) Si g est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$.

3.3 Théorème du rang

Théorème 3: (Théorème du rang)

Soient E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est de rang fini et

$$\dim E = \text{rg } f + \dim \ker f.$$

Corollaire 2

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- (i) f est surjective $\iff \text{rg } f = \dim F$.
- (i) f est injective $\iff \text{rg } f = \dim E$.

Par conséquent, si $\dim E = \dim F$, alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

C'est en particulier le cas lorsque f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**.

Exemples 11 Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, -x + y, z)$$

est bijective.

Proposition 12

Soient E et F deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, f est bijective **si et seulement si** il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{ou} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Dans ce cas $g = f^{-1}$.

3.4 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

4 Transformations vectorielles

4.1 Homothétie

Définition 7

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie** de E de rapport λ l'application $h_\lambda : E \rightarrow E$ définie par $h_\lambda(x) = \lambda x$. C'est un endomorphisme de E .

Exemples 12 Id_E est une homothétie.

4.2 Projection

Définition 8

Soient F et G deux sev supplémentaires dans un $\mathbb{K}$ -ev E , i.e. $E = F \oplus G$. Alors :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G.$$

On appelle alors **projection sur F parallèlement à G** l'application $p : E \rightarrow E$ qui à $x = x_F + x_G$ associe x_F .

Remarque 2 • Pour tout $x \in F$: $p(x) = x$

- Pour tout $x \in G$: $p(x) = x - p(x)$
- $\text{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = G$.
- $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Exemples 13 On se place dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$. On a : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. Déterminer p la projection sur $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Proposition 14

Soient F et G deux sev **supplémentaires** dans un $\mathbb{K}$ -ev E , i.e. $E = F \oplus G$.
Soit p la projection sur F parallèlement à G .
Alors, p est un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$p^2 = p.$$

Remarque 3 On a : $x \in \text{Im } p \iff p(x) = x$

Définition 9: Projecteur

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **projecteur** si $u^2 = u$

Exemples 14 Toute projection est un projecteur.

4.3 Symétrie

Définition 10

Soient F et G deux sev supplémentaires dans un $\mathbb{K}$ -ev $E : E = F \oplus G$. Alors :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G.$$

On appelle **symétrie par rapport F parallèlement à G** l'application $s : E \rightarrow E$ qui à $x = x_F + x_G$ associe $x_F - x_G$.

Remarque 4 • Pour tout $x \in F : s(x) =$

- Pour tout $x \in G : s(x) =$
- $s = 2p - \text{Id}_E$ ou encore $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. En effet :
 $\forall x \in E, \quad \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)(x) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = \frac{1}{2}((x_F - x_G) + (x_F + x_G)) = x_F = p(x).$

Exemples 15 On se place dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$. On a : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
Déterminer s la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Proposition 15

Soient F et G deux sev **supplémentaires** dans un $\mathbb{K}$ -ev $E : E = F \oplus G$.
Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .
Alors, s est un endomorphisme de E qui vérifie la propriété caractéristique suivante :

$$s^2 = \text{Id}_E.$$