

Chapitre 23: Espaces Vectoriels de Dimension finie

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Familles de vecteurs

1.1 Familles génératrices

Définition 1: (Famille génératrice)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .
On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une **famille génératrice** de E ou encore qu'elle **engendre** E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(u_1, \dots, u_n)$:

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Autrement dit :

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est génératrice de } E \iff E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Exemples 1 (Famille génératrice de $\mathbb{K}^n$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$,
 $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.
Alors, $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Exemples 2 (Famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$) On a :
 $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$.
Donc la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemples 3 (Famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{i,j}.$$

Alors $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemples 4 • Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, z = a.1 + b.i \quad \text{avec } a = \text{Re}(z) \text{ et } b = \text{Im}(z).$$

Alors la famille $(1, i)$ est génératrice du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

• Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = z.1$$

Alors la famille (1) est génératrice du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Montrer que les vecteurs $u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$ engendrent le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^3$.

1.2 Familles libres, familles liées

Définition 2: (Famille libre, famille liée)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$.

- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est **libre** ou encore que les u_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont **linéairement indépendants** si :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est **liée** ou encore que les u_i sont **linéairement dépendants** si elle **n'est pas libre** :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Autrement dit, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Exemples 5 $(1, i)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$a.1 + b.i = 0 \iff a = b = 0.$$

Alors la famille $(1, i)$ est famille libre du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

Exercice 3 Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient de position (i, j) est égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Montrer que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est libre de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 4 Montrer que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre du $\mathbb{K}$ -ev $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5 Montrer que les vecteurs $u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$ du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants.

Proposition 1

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $u_1, \dots, u_n \in E$.

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée **si et seulement si** l'un des u_i est combinaison linéaire des autres.

Par conséquent, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre **si et seulement si** aucun des u_i n'est combinaison linéaire des autres.

Exercice 6 Posons $u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$.

Vérifier que $v = 2u + w$. Que peut-on déduire de liberté de la famille (u, v, w) ?

Corollaire 1

- Une famille à un vecteur est liée **si et seulement si** ce vecteur est nul.
- Une famille à deux vecteurs est liée **si et seulement si** ces deux vecteurs sont colinéaires.
- Une famille à trois vecteurs est liée **si et seulement si** ces deux vecteurs sont coplanaires.
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Remarque 1 On peut réécrire le corollaire précédent ainsi :

- Une famille à un vecteur est libre **si et seulement si** ce vecteur est non nul.
- Une famille à deux vecteurs est libre **si et seulement si** ces deux vecteurs sont non colinéaires.
- Une famille à trois vecteurs est libre **si et seulement si** ces trois vecteurs sont non coplanaires.

Définition 3

Une famille $(P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de degrés tous distincts est appelée famille de polynômes de degrés échelonnés.

Proposition 2

Toute famille $(P_1, \dots, P_n)$ de polynômes **non nuls** et de degrés échelonnés est libre.

Exercice 7 Que peut-on dire de la liberté de la famille $\mathcal{F} = (X^2 + 1, X^5 + 2X^3 - 1, 5X^3 + 3X)$ de $\mathbb{K}[X]$?

1.3 Bases

Définition 4: (Base)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une **base** de E si elle est à la fois **génératrice** et **libre** de E .

Exemples 6 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Exemples 7 (Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient de position (i, j) est égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Alors $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemples 8 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$) La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemples 9 $\blacktriangleright (1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

$\blacktriangleright (1)$ est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Proposition-Définition 1: (Coordonnées dans une base)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Alors

$$\forall x \in E, \quad \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé les **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Exemples 10 Rappelons que $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminons les coordonnées de $P = (X + 1)^3$ dans la base $\mathcal{B}$.
On a $P = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$.
Donc les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 3, 3, 1)$.

Exercice 8 Déterminer les coordonnées de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 1))$.

Proposition 3: (Base adaptée à une somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels en somme directe d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base F et $(g_1, \dots, g_m)$ est une base G , alors la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est une base de $F \oplus G$. Une telle base est dite **base adaptée** à la somme directe $F \oplus G$.

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 5

On dit qu'un ev est de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que l'ev est de **dimension infinie**.

Exemples 11 • $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisque sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice finie.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie puisque sa base canonique $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une famille génératrice finie.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie puisque sa base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice finie.

Exemples 12 $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

2.2 Théorème de la base extraite et existence de bases

Proposition 4: (Principe de réduction des familles génératrices)

Si $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$ -ev E et si u_{n+1} est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$, alors la sous-famille $(u_1, \dots, u_n)$ est encore génératrice de E .

Théorème 1: (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$ -ev **non nul** on peut extraire une base.

Exercice 9 Posons $E = \text{Vect}(u, v, w)$ avec $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 1, 2)$ et $w = (3, 3, 3)$. Vérifier $w = u + v$, puis extraire une base de E .

Corollaire 2: (Théorème d'existence de bases)

Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **non nul** de dimension finie possède au moins une base.

Remarque 2 Si $E = \{0_E\}$, alors E n'a pas de base car E n'admet même aucune famille libre.

2.3 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Alors : $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$.

Proposition-Définition 2: (Dimension)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nul.
Alors toutes les bases de E ont même nombre d'éléments. On appelle cet entier la **dimension** de E (sur $\mathbb{K}$) et on le note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou tout simplement $\dim E$.
Par convention, on pose : $\dim_{\mathbb{K}} \{0_E\} = 0$

Exemples 13 (*Dimensions usuelles*)

- ◇ $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base $\mathbb{K}^n$.
- ◇ $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$, car $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ◇ $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, car $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- ◇ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, car $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -ev.
- ◇ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, car (1) est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ -ev.

Définition 6

- Un espace vectoriel de dimension 1 est dit **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel de dimension 2 est dit **plan vectoriel**.

2.4 Caractérisation de bases en dimension finie connue

Proposition 6

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E .

- (i) Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq n$.
- (ii) Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E , alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq n$.

Par contraposée, on a

- (i) Si $\text{Card}(\mathcal{F}) > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
- (ii) Si $\text{Card}(\mathcal{F}) < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E .

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs (c-à-d $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim E$).
Alors

$\mathcal{B}$ est une base de $E \iff \mathcal{B}$ est libre de $E \iff \mathcal{B}$ est génératrice de E .

Exemples 14 Montrer que $\mathcal{B} = (u = (0, 1, 2), v = (1, 2, 0), w = (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.5 Théorème de la base incomplète

Proposition 7: (Principe d'extension des familles libres)

Soient $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre et si u_{n+1} n'est pas CL de $u_1, \dots, u_n$ (i.e. $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$), alors la sur-famille $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est libre.

Théorème 3: (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On peut compléter toute famille libre finie de E en une base de E .

Exercice 10 Posons $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$.

Justifier qu'on compléter (u, v) en une base $\mathbb{R}^3$, puis la compléter.

3 Dimension et sous-espaces vectoriels

3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 8

Soit F un sev d'un ev de dimension finie E .

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus, on a :

$$\dim F = \dim E \iff E = F.$$

Exemples 15 ► Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.

► Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.

3.2 Existence de supplémentaire

Proposition 9

Soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $\text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$ sont en somme directe.

Ainsi :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \oplus \text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n).$$

Théorème 4

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F possède un supplémentaire dans E .

Méthode

Pour former un supplémentaire de F , il suffit de compléter une base de F en une base de E et de considérer le sev engendré par les vecteurs complétant.

Exercice 11 Considérons les vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $F = \text{Vect}(u, v)$ admet un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$.

3.3 Dimension d'une somme

Théorème 5: (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E . Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier, si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Corollaire 3

Soient F et G deux sev d'un ev de dimension finie E . Alors :

F et G sont supplémentaires dans $E \iff \dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 7: (Rang d'une famille)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E . Alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension finie et sa dimension est appelée le **rang** de $\mathcal{F}$ noté $\text{rg}(\mathcal{F})$.

Exercice 12 Posons $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 1, 2)$, $w = (3, 3, 3)$ et $z = (2, 4, 2)$.

Vérifier que $w = u + v$ et $z = 2u$, puis déterminer le rang de la famille (u, v, w, z) .

Remarque 3 (i) Si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de p vecteurs de E , alors $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$.

(ii) Si E est de dimension finie n , alors $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$.

(iii) Si ces deux conditions sont réunies, on a donc $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \min(n, p)$.

Proposition 10

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de p vecteurs d'un espace vectoriel E .

(i) $\mathcal{F}$ est libre $\iff \text{rg}(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F})$.

(ii) Si E est de dimension finie, alors :

$$\mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \text{rg}(\mathcal{F}) = \dim E.$$