LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Chapitre 20: Espaces Vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition

Définition 1: Espace vectoriel

Soit E un ensemble muni :

- d'une loi d'addition : $(x, y) \in E^2 \mapsto x + y$
- d'une loi de multiplication externe : $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda.x$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(i) $\forall x, y \in E, x + y \in E$

(ii) $\forall x, y \in E, x + y = y + x$

(iii) $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$

(iv) $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = x$

(v) $\forall x \in E, \exists(-x) \in E, x + (-x) = 0_E$

(vi) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \lambda x \in E$

(vii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

(viii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x \in E, (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

(ix) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(x) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, -(\lambda x) = (-\lambda)x = \lambda(-x)$

1.2 Exemples de référence

Exemples 1 *Pour* $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, *on pose*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Alors $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et son vecteur nul est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$.

Remarque 1 *Pour $n = 1$, on trouve $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Exemples 2 *Pour $z = a + ib, z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$, on pose*

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose

$$\lambda \cdot z = \lambda a + i\lambda b$$

Alors $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemples 3 *Pour $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose*

$$P + Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$\lambda \cdot P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n$$

Alors $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et son vecteur nul est le polynôme nul.

Exemples 4 *On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose*

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Alors $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et son vecteur nul est la suite nulle.

Exemples 5 *Soient Ω un ensemble. On note $\mathbb{K}^{\Omega}$ (ou $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{K}$. Pour $f, g \in \mathbb{K}^{\Omega}$, on pose*

$$f + g : \Omega \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x) + g(x)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathbb{K}^{\Omega}$, on pose

$$\lambda \cdot f : \Omega \to \mathbb{K}, x \mapsto \lambda f(x)$$

Alors $(\mathbb{K}^{\Omega}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et son vecteur nul est la fonction nulle.

Exemples 6 *Pour $A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose $\lambda A = (\lambda a_{ij})$. Alors $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et son vecteur nul est $0_{\mathcal{M}_{n,p}} = (0)_{n,p}$.*

1.3 Espace vectoriel produit

Théorème 1

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Alors $(E_1 \times \cdots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé **espace vectoriel produit**, et son vecteur nul est $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$.

Exemples 7 *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E^n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1.4 Espace vectoriel d'applications

Théorème 2

Soient Ω un ensemble et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit F^Ω des applications de Ω dans F de :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Alors $(F^\Omega, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $0_{F^\Omega} : x \mapsto 0_F$.

Exemples 8 $\mathbb{K}^\Omega$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel car* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et exemples

Définition 2: Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

1. $0_E \in F$
2. $\forall x, y \in F, x + y \in F$ (stabilité par addition)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda x \in F$ (stabilité par multiplication externe)

Exemples 9 ***(Sous-espaces triviaux)***
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Alors* $\{0_E\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriels de* E*.*

Exercice 1 *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *non nul. Alors* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 2 *Si $n\mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[x], \deg P = n\}$* ***n'est pas*** *un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. Alors :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F \end{cases}$$

Proposition 3

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples 10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exercice 3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$*
- *$\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ (fonctions dérivables) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$*

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 3 *La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est généralement pas un sous-espace vectoriel.*

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.3 Combinaisons linéaires

Définition 3: Combinaison linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n \in E$. On appelle combinaison linéaire des u_i tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Exemples 11 *Le vecteur $(2, 3)$ est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$ car $(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$.*

Exemples 12 *Tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ est combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.*

Exemples 13 *Tout polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ est combinaison linéaire de $1, X, X^2$.*

Proposition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_i \in \mathbb{K}, \forall u_i \in F, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in F$$

2.4 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 4: Sous-espace engendré

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. On appelle sous-espace engendré par $u_1, \dots, u_n$ l'ensemble :

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Exercice 4 $\mathbb{K}_2[X] = vect(1, X, X^2)$

Exercice 5 $\mathbb{K}_n[X] = vect(1, X, \dots, X^n)$

Proposition 7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u_1, \dots, u_n \in E$. Alors :

$$u_1, \dots, u_n \in F \implies \text{vect}(u_1, \dots, u_n) \subset F$$

Corollaire 1

Soient $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si u_{n+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$, alors :

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$$

2.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 5: Somme de sous-espaces

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On définit :

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$$

Proposition 8

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 *Si* $F = vect(f_1, \dots, f_n)$ *et* $G = vect(g_1, \dots, g_p)$*, alors :*

$$F + G = vect(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$$

2.6 Somme directe

Définition 6: Somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F et G sont en somme directe si tout vecteur de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On note alors $F \oplus G$.

Proposition 9

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Exercice 7 *Dans $\mathbb{R}^3$, les droites $D = vect((0,1,0))$ et $\Delta = vect((0,3,1))$ sont en somme directe.*

Exercice 8 *Dans $\mathbb{R}^3$, les plans $P = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$ et $Q = \{(x,y,z) \mid 2x-y-z=0\}$ ne sont pas en somme directe.*

2.7 Sous-espaces supplémentaires

Définition 7: Sous-espaces supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dits supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

Exercice 9 *$\{0_E\}$ et E sont supplémentaires dans E.*

Exercice 10 *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont supplémentaires.*