

Chapitre 1: Nombres Complexes

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des Nombres Complexes

Théorème 1

Il existe un ensemble, qu'on note $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$ et dont chaque élément z s'écrit d'une manière **unique** sous la forme $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, et i est un élément de $\mathbb{C}$ qui vérifie $i^2 = -1$.

Propriétés 1: Règles de Calcul dans $\mathbb{C}$

Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, on a :

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ et $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.
3. $z_1 + 0 = z_1$ et $z_1 \cdot 1 = z_1$.
4. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Définition 1

L'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des **nombres complexes**. Si z de $\mathbb{C}$ s'écrit de la forme $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, x est appelé la **partie réelle** de z et y est appelé la **partie imaginaire** de z , et on note $Re(z) = x$ et $Im(z) = y$. L'écriture $x + iy$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z .

Si $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle nulle, on dit que z est un **imaginaire pur**. On note l'ensemble des nombres imaginaires pures par $i\mathbb{R}$.

Exercice 1 Calculer les parties réelle et imaginaire de iz en fonction de celles de z .

Proposition 1

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$
- $z = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$
- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0$

Exercice 2 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- (1) Calculer les parties réelle et imaginaire de λz_1 .
- (2) Calculer les parties réelle et imaginaire de $z_1 + z_2$
- (3) Même question pour $z_1 z_2$.

Interprétation géométrique des nombres complexes :

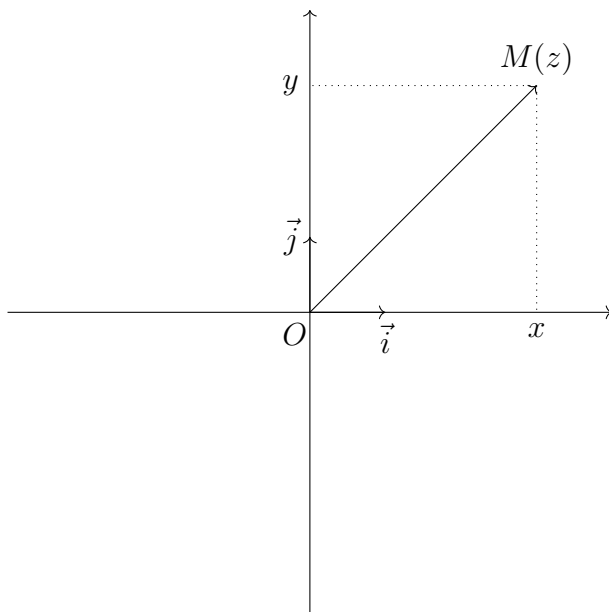
Si $\mathcal{P}$ est un plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'application :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ z = x + iy &\longmapsto M(x, y) \end{aligned}$$

nous permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ au plan $\mathcal{P}$.

Si $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $M = \phi(z) = M(x, y)$ est dit l'image de z , et z est appelé l'afixe du point M , et on note $M(z)$ au lieu de $M(x, y)$.



Remarque 1 • L'axe $(O, \vec{i})$ est appelé l'axe réel.
 • l'axe $(O, \vec{j})$ est appelé l'axe imaginaire.

Proposition 2

Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectifs a et b , alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

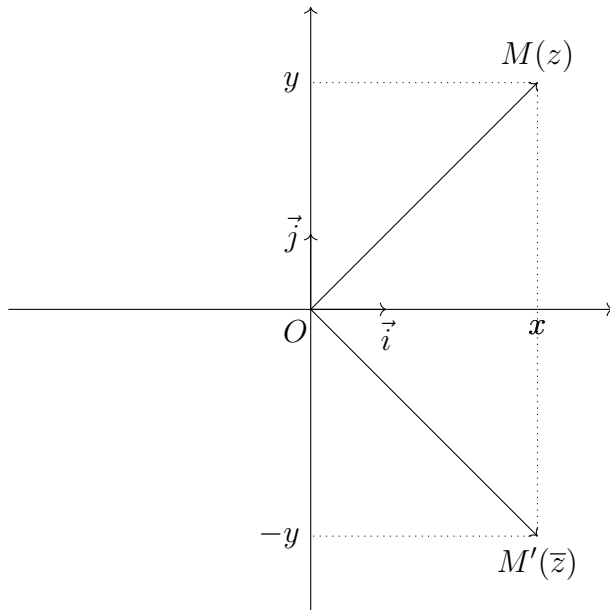
Définition 2: Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On appelle **conjugué** de z , qu'on note $\bar{z}$, le nombre complexe $x - iy$.

Remarque 2 On a alors $Re(z) = Re(\bar{z})$ et $Im(z) = -Im(\bar{z})$.

Interprétation géométrique du conjugué :



Donc le point M' d'affixe $\bar{z}$ n'est que l'image du point $M(z)$ par la symétrie par rapport à l'axe réel.

Proposition 3

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes :

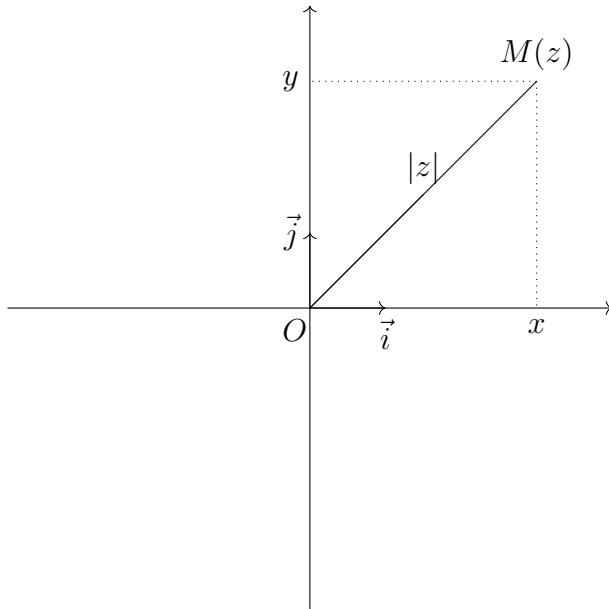
- a) $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- b) $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$.
- c) $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.
- d) $\bar{\bar{z}} = z$.
- e) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- f) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- g) Si $z_2 \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Définition 3: Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On appelle **module** de z , qu'on note $|z|$, le réel positif $\sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$.

Interprétation géométrique du module :



Exemples 1 *Calculer le module de $z = 1 - i$.*

Application. Donner la forme algébrique du nombre complexe $z = \frac{1 + 2i}{1 - i}$.

Proposition 4

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.
- $|-z| = |\bar{z}| = |z|$.
- $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- $|z^n| = |z|^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Preuve.

Proposition 5: Inégalités triangulaires

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- Inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

avec égalité si, et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

- Inégalité triangulaire renversée :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Preuve.

Remarque 3 En particulier $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Remarque 4 (1) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors on a aussi :

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(2) Si $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes, alors

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Remarque 5 Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points du plan, alors $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}||$.

Propriétés 2

Soit A un point du plan d'affixe a et $r \geq 0$. Alors,

- L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r\}$ est le cercle de centre A et du rayon r .
- L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$ est le disque de centre A et du rayon r .

2 Forme Trigonométrique

2.1 Nombres complexes de module 1

Définition 4

On note par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Autrement dit, $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique : le cercle de centre O et de rayon 1. i.e.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Remarque 6 Si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z} \iff \bar{z} \in \mathbb{U}$$

Exercice 3 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \mathbb{U}$.

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $a \neq -b$. Montrer que $\frac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.

2.2 Exponentielle d'un imaginaire pur

Définition 5

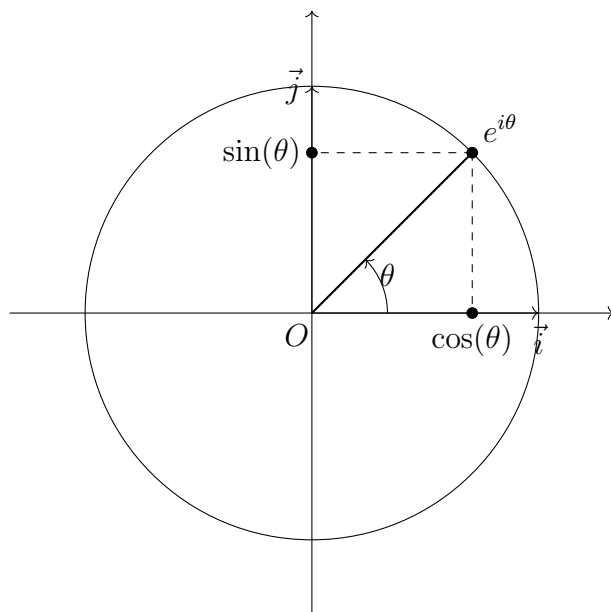
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Exemples 2 $e^{i \cdot 0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Notation On note $e^{-i\theta} := e^{i(-\theta)}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 7 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 0$.

Interprétation géométrique du nombre complexe $e^{i\theta}$:



Proposition 6

- Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.
- Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' + 2\pi k$ for some integer k .

Propriétés 3

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $\overline{e^{i\alpha}} = \frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$.
- $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$.
- **Formules d'Euler:** $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.
- **Formule de Moivre :** $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$.
Autrement dit, $(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$.

Méthode : L'angle moitié

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

et

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) = 2i \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Application : Pour $\beta \in]0, \pi[$, trouver le module de $z = 1 + e^{i\beta}$.

2.3 Argument d'un nombre complexe non nul

Théorème 2

Tout nombre complexe non nul z peut être exprimé sous la forme suivante, appelée **forme trigonométrique** :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Définition 6

Avec les notation du Théorème 2, θ est appelé **un argument** de z et on note

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

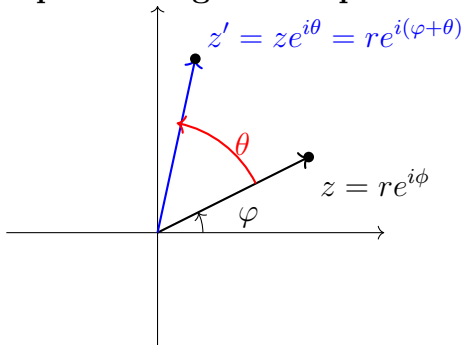
Exemples 3 Déterminer un argument de $1 + i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

Méthode : Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $r, \theta \in \mathbb{R}$. Alors deux cas se présentent :

- Si $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.
- Si $r < 0$, alors $|z| = -r$ et $\arg(z) \equiv \pi + \theta[2\pi]$.

Remarque 8 Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $I =]a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $b - a = 2\pi$. Alors il existe **un unique** $\theta \in I$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
En particulier si $I =]-\pi, \pi]$.

Interprétation géométrique de la multiplication par $e^{i\theta}$:



Propriétés 4

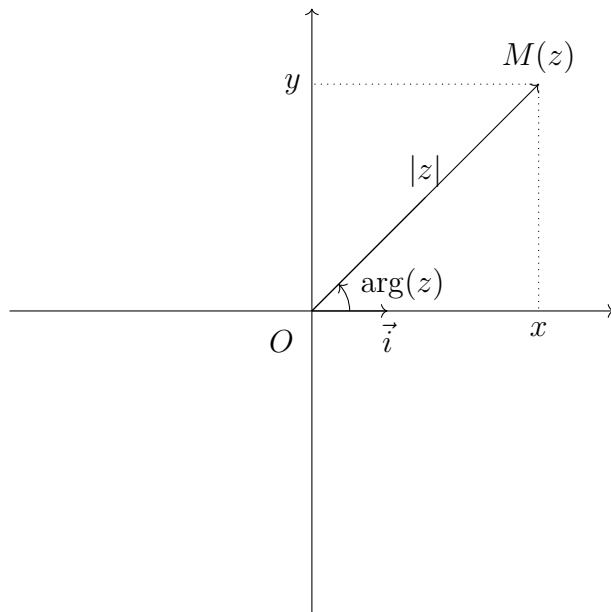
Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$

Preuve.

Exercice 5 Calculer un argument de $\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

Interprétation géométrique d'un argument d'un nombre complexe non nul :
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, avec $x, y \in \mathbb{R}$;



Un argument de z est alors égale, mod 2π , à une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Proposition 7: Caractérisation des réels avec la notion d'argument

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

1.

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0[\pi]$$

2.

$$z \in \mathbb{R}^+ \iff \arg(z) \equiv 0[2\pi]$$

3.

$$z \in \mathbb{R}^- \iff \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$$

4.

$$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Proposition 8

Soient a et b des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors il existe A et φ des réels tels que pour $t \in \mathbb{R}$:

$$a \cos(t) + b \sin(t) = A \cos(t - \varphi)$$

Preuve.

3 Racines de l'unité et Équations algébriques

3.1 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 7

Soient $a, z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que z est une **racine n -ième** de a si $z^n = a$. En particulier, les racines n -ième de 1 sont appelées **racines n -ième de l'unité**. On note par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces éléments.

Exemples 4 i et $-i$ sont des racines carrées de -1 .

Exercice 6 Déterminer les racines 4-ème de l'unité.

Théorème 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe exactement n racines n -ème de l'unité. Ces éléments sont de la forme:

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

- De façon générale, si $a = re^{i\theta}$ est la forme trigonométrique d'un nombre complexe a non nul, avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors a admet exactement n racines n -ème de l'unité. Ces racines sont les nombres complexes de la forme :

$$\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right)}, \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Exemples 5 On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Déterminer les racines cubiques de l'unité en fonction de j .

Exercice 7 Déterminer les racines cubiques de $z = 1 + i$.

3.2 Racines carrées

On présente trois méthodes pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul a :

1. **Méthode trigonométrique** : Si on peut écrire simplement a sous son forme trigonométrique $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors les racines carrées de a sont

$$\pm \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2. **Méthode algébrique** : Si $a = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors on cherche des $c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} c^2 + d^2 &= \sqrt{x^2 + y^2} &= |a| \\ c^2 - d^2 &= x &= \operatorname{Re}(a) \\ 2cd &= y &= \operatorname{Im}(a) \end{cases}$$

Les racines carrées de a sont alors $\pm(c + id)$.

3. **Identités remarquables** : Dans cette méthode on essaye tout simplement de remarquer une identité remarquable, i.e. des $c, d \in \mathbb{R}$ dont $(c + id)^2 = a$.

Exercice 8 Déterminer les racines carrées de $a = -3 + 4i$.

3.3 Application : Équations du Second Degré

Théorème 4

Soient a, b et $c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions, éventuellement égaux qui sont

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque 9 • Avec les notations du théorème précédent, on a

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

et on a alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

- Dans le cas où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, les deux solutions de l'équation sont des nombres complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$.

3.4 Factorisation D'un Polynôme

Théorème 5

Soient P un polynôme à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$.

Si a est une racine de P , i.e. si $P(a) = 0$, alors il existe Q un polynôme sur $\mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z - a)Q(z)$$

Remarque 10 Dans ce cas, $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Exercice 10 Considérons $P(z) = z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i$.

1. Justifier que P se factorise sous la forme $P(z) = (z - 2i)Q(z)$, où Q est un polynôme à coefficients complexes.
2. Déterminer Q .

4 Exponentielle Complexe

Définition 8

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit l'**exponentielle** de z par :

$$e^z := e^x e^{iy} = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(y) + i \sin(y))$$

Remarque 11 On a alors :

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z))$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z))$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$
- $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z)[2\pi]$

Propriétés 5

Soient $r, r', \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $r, r' \geq 0$, alors

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Notation 1 On note par $2\pi\mathbb{Z}$ les nombres **réels** de la forme $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et on note par $2i\pi\mathbb{Z}$ les nombres **complexes** de la forme $2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'équivalence dans Propriétés 5 devient alors :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Proposition 9

Soient z, z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $e^z \neq 0$.
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
- $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.
- $e^{nz} = (e^z)^n$.

Notation 2 Puisque pour tout $z \in \mathbb{R}$, e^z n'est en fait que son image par la fonction exponentielle *réelle*. On note alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) := e^z$.

Proposition 10

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Considérons sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = a$ d'inconnue z .

Les solutions de cette équation sont les nombres complexes $\ln(|a|) + iy$, avec $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \equiv \arg(a)[2\pi]$.

Preuve.

Corollaire 1

Soient z, z' des complexes. Alors,

- $e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

5 Nombres complexes et Géométrie plane

Pour tout le reste, on considère $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 11

Si $A(a)$ et $B(b)$ deux points de $\mathcal{P}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, alors :

- $\overrightarrow{AB}(b - a)$
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |b - a|$ et $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{AB})} \equiv \arg(b - a)[2\pi]$.

Corollaire 2

Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ des points de $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors :

- $\frac{CD}{AB} = \left| \frac{d - c}{b - a} \right|$
- $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$.

Corollaire 3: Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité

Soient $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts deux à deux de $\mathcal{P}$ Alors,

- A, B et C sont alignés $\iff \frac{b - c}{c - a} \in \mathbb{R}$
- $(AB) \perp (AC) \iff \frac{b - a}{c - a} \in i\mathbb{R}$

Proposition 12: Caractérisation de la cocyclicité

Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus que A, B, C sont non alignés. Alors

$$A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques} \iff \frac{d - a}{c - a} \frac{c - b}{d - b} \in \mathbb{R}$$

5.1 Transformations usuelles

Proposition 13

Soient $M(z)$ et $M(z')$ deux points de $\mathcal{P}$. Alors,

- M et M' sont symétriques par rapport à O si et seulement si $z' = -z$.
- M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$ si et seulement si $z' = \bar{z}$.
- M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{j})$ si et seulement si $z' = -\bar{z}$.

Proposition 14

Soient $M(z), \Omega(\omega), \vec{u}(a)$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la **translation** de vecteur $\vec{u}(a)$ si et seulement si $z' = z + a$.
2. $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'**homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport λ si et seulement si $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.
3. $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la **rotation** de centre $\omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

5.2 Similitudes Directes

Définition 9

Une **similitude directe** est une transformation de plan admettant comme représentation dans le plan complexe l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az + b\end{aligned}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Exemples 6 1. Les translations, les homothéties et les rotations sont toutes des similitudes directes.

2. La composée de deux similitudes directes est elle même une similitude directe.

Théorème 6

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude du plan telle que $f(z) = az+b$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors,

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, f admet un point fixe unique Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. On appelle Ω le centre de la similitude. De plus, si

$$\begin{cases} \arg(a) \equiv \theta[2\pi] \\ r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \theta \\ h \text{ est l'homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } |a| \end{cases}$$

alors $f = r \circ h = h \circ r$.