Chapitre 1: Nombres Complexes

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des Nombres Complexes

Théorème 1

Il existe un ensemble, qu'on note $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$ et dont chaque élément z s'écrit d'une manière **unique** sous la forme $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, et i est un élément de $\mathbb{C}$ qui vérifie $i^2 = -1$.

Propriétés 1: Règles de Calcul dans $\mathbb{C}$

Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, on a :

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ et $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.
3. $z_1 + 0 = 0$ et $z_1.1 = z_1$.
4. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Définition 1

L'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des **nombres complexes**. Si z de $\mathbb{C}$ s'écrit de la forme $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, x est appelé la **partie réelle** de z et y est appelé la **partie imaginaire** de z, et on note $Re(z) = x$ et $Im(z) = y$. L'écriture $x + iy$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z.
Si $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle nulle, on dit que z est un **imaginaire pur**. On note l'ensemble des nombres imaginaires pures par $i\mathbb{R}$.

Exercice 1 *Calculer les parties réelle et imaginaire de iz en fonction de celles de z.*

Proposition 1

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(z_2)$ et $Im(z_1) = Im(z_2)$
- $z = 0 \iff Re(z) = Im(z) = 0$
- $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0$

Exercice 2 *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(1) Calculer les parties réelle et imaginaire de λz_1.

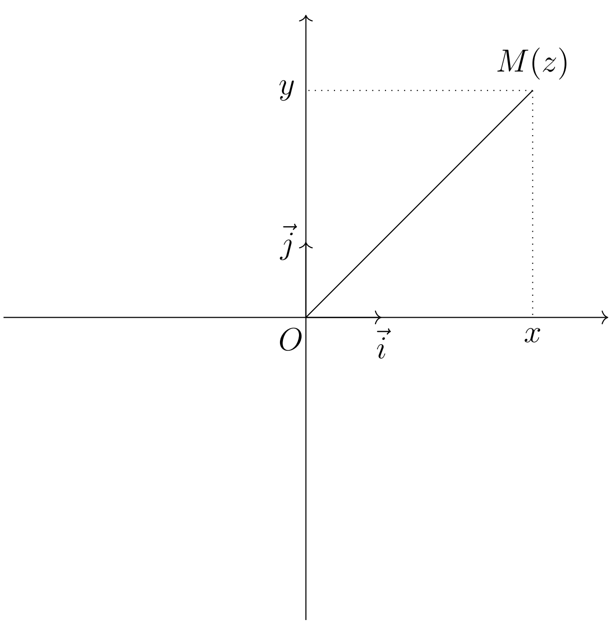
(2) Calculer les parties réelle et imaginaire de $z_1 + z_2$

(3) Même question pour $z_1 z_2$.

Intepprétation géométrique des nombres complexes :
Si $\mathcal{P}$ est un plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & z = x + iy & \longmapsto & M(x, y) \end{array}$$

nous permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ au plan $\mathcal{P}$.
Si $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $M = \phi(z) = M(x, y)$ est dit l'image de z, et z est appelé l'affixe du point M, et on note $M(z)$ au lieu de $M(x, y)$.



Remarque 1

- *L'axe $(O, \vec{i})$ est appelé l'axe réel.*

- *l'axe $(O, \vec{j})$ est appelé l'axe imaginaire.*

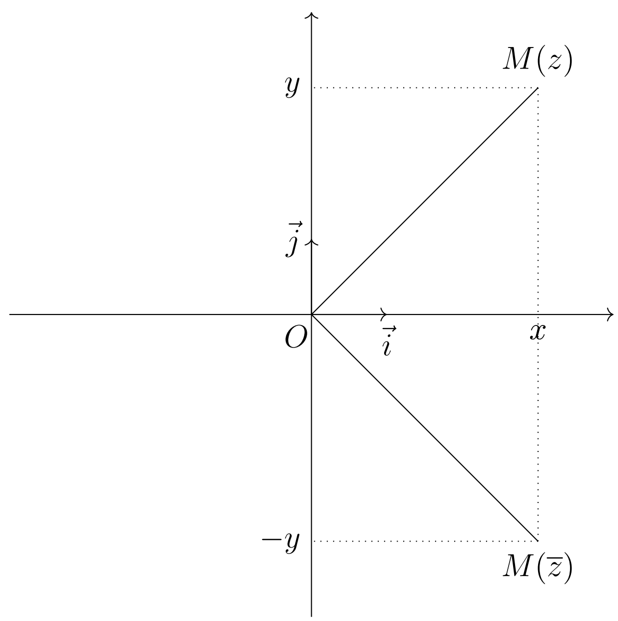
Proposition 2

Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectifs a et b, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Définition 2: Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
On appelle **conjugué** de z, qu'on note $\overline{z}$, le nombre complexe $x - iy$.

Interprétation géométrique du conjugué :



Remarque 2 *On a alors $Re(z) = Re(\overline{z})$ et $Im(z) = -Im(\overline{z})$.*

Proposition 3

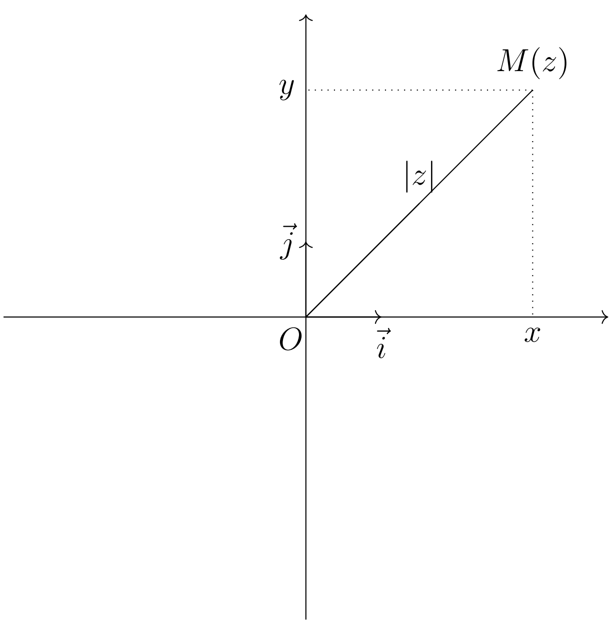
Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes :

- $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
- Si $z_2 \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Définition 3: Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$.
On appelle **module** de z, qu'on note $|z|$, le réel positif $\sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$.

Interprétation géométrique du module :



Exemples 1 *Calculer le module de $z = 1 - i$.*

Application. Donner la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{1+2i}{1-i}$.

Proposition 4

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$.
- $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$.
- $|z^n| = |z|^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Proposition 5: Inégalités triangulaires

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- **Inégalité triangulaire** :
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
avec égalité si, et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.
- **Inégalité triangulaire renversée** :
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Remarque 3 *Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points du plan, alors $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}||$.*

Propriétés 2

Soit A un point du plan d'affixe a et $r \geq 0$. Alors,

- L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r\}$ est le cercle de centre A et du rayon r.
- L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$ est le disque de centre A et du rayon r.

2 Forme Trigonométrique

2.1 Nombres complexes de module 1

Définition 4

On note par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Autrement dit, $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique : le cercle de centre O et de rayon 1.

Remarque 4 *Si $z \in \mathbb{C}$, alors*

$$z \in \mathbb{U} \iff \overline{z} = \frac{1}{z} \iff \overline{z} \in \mathbb{U}$$

Exercice 3 *Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{U}$.*

Exercice 4 *Soient $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $a \neq -b$. Montrer que $\dfrac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{U}$.*

2.2 Exponentielle d'un imaginaire pur

Définition 5

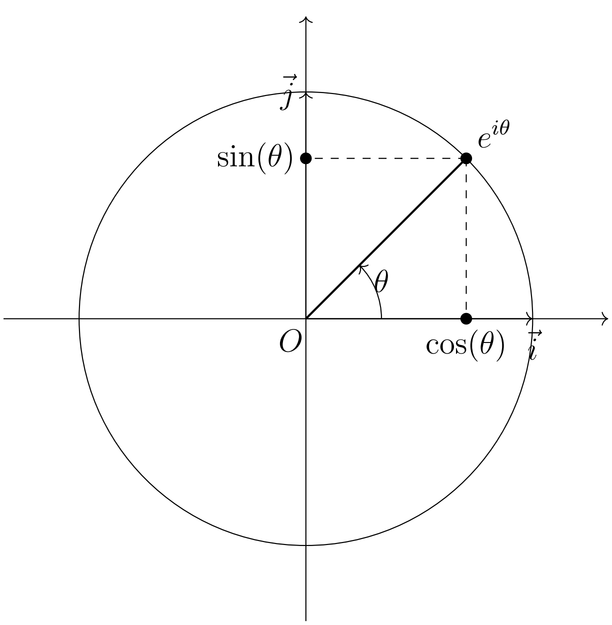
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Exemples 2 $e^{i.0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Notation On note $e^{-i\theta} := e^{i(-\theta)}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 5 *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 0$.*

Interprétation géométrique du nombre complexe $e^{i\theta}$:



Proposition 6

- Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.
- Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta'[2\pi]$

Propriétés 3

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $\overline{e^{i\alpha}} = \dfrac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$.
- $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.
- **Formules d'Euler:** $\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.
- **Formule de Moivre** : $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$.
  Autrement dit, $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.

Méthode : L'angle moitié

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

et

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2i\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Application : Pour $\beta \in]0, \pi[$, trouver le module de $z = 1 + e^{i\beta}$.

2.3 Argument d'un nombre complexe non nul

Théorème 2

Tout nombre complexe non nul z peut être exprimé sous la forme suivante, appelée **forme trigonométrique** :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(cos(\theta) + i\sin(\theta)), \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Définition 6

Avec les notation du Théorème 2, θ est appelé **un argument** de z et on note

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

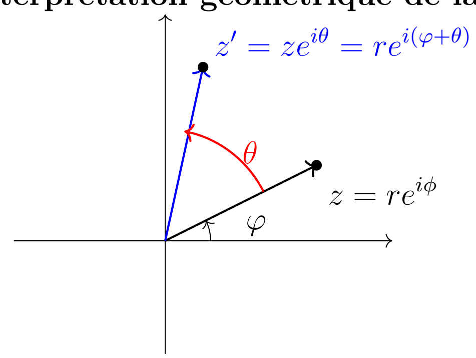
Exemples 3 *Déterminer un argument de $1+i$ et $1+i\sqrt{3}$.*

Méthode : Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $r, \theta \in \mathbb{R}$. Alors deux cas se présentent :

- Si $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.
- Si $r < 0$, alors $|z| = -r$ et $\arg(z) \equiv \pi + \theta[2\pi]$.

Remarque 6 *Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $I =]a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $b - a = 2\pi$. Alors il existe* ***un unique*** *$\theta \in I$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.*
En particulier si $I =]-\pi, \pi]$.

Interprétation géométrique de la multiplication par $e^{i\theta}$:



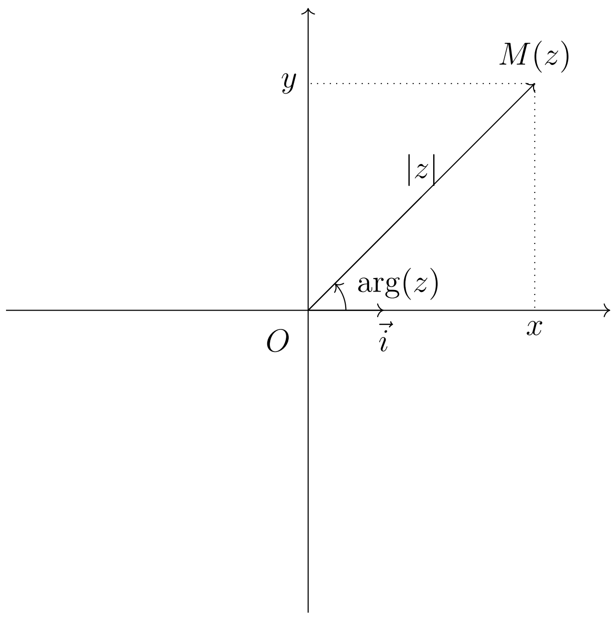
Propriétés 4

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$

Exercice 5 *Calculer un argument de $\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.*

Interprétation géomtrique d'un argument d'un nombre complexe non nul :
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, avec $x, y \in \mathbb{R}$;



Un argument de z est alors égale, $\mod 2\pi$, à une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Proposition 7: Caractérisation des réels avec la notion d'argument

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

1. $$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0[\pi]$$
2. $$z \in \mathbb{R}^+ \iff \arg(z) \equiv 0[2\pi]$$
3. $$z \in \mathbb{R}^- \iff \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$$
4. $$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Proposition 8

Soient a et b des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. Alors il existe A et φ des réels tels que pour $t \in \mathbb{R}$:
$$a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi)$$

3 Racines de l'unité et Équations algébriques

3.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 7

Soient $a, z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que z est une **racine n-ième** de a si $z^n = a$.
En particulier, les racines n-ième de 1 sont appelées **racines n-ième de l'unité**. On note par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces éléments.

Exemples 4 *i et $-i$ sont des racines carrés de -1.*

Exercice 6 *Déterminer les racines 4-ème de i.*

Théorème 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Il existe exactement n racines n-ème de l'unité. Ces éléments sont de la forme:

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

- De façon générale, si $a = re^{i\theta}$ est la forme trigonométrique d'un nombre complexe a non nul, avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors a admet exactement n racines n-ème de l'unité. Ces racines sont les nombres complexes de la forme :

$$\sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)}, \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Exemples 5 *On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.*
Déterminer les racines cubiques de l'unité en fonction de j.

Exercice 7 *Déterminer les racines cubiques de $z = 1 + i$.*

3.2 Racines carrées

On présente trois méthodes pour déterminer les racines carées d'un nombre complexe non nul a:

1. **Méthode trigonométrique :** Si on peut écrire simplement a sous son forme trignométrique $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors les racines carrés de a sont

$$\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2. **Méthode algébrique :** Si $a = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors on cherche des $c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} c^2 + d^2 &= \sqrt{x^2+y^2} &= |a| \\ c^2 - d^2 &= x &= Re(a) \\ 2cd &= y &= Im(a) \end{cases}$$

Les racines carrées de a sont alors $\pm(c + id)$.

3. **Identités remarquables :** Dans cette méthode on esssaye tout simplement de remarquer une identité remarquable, i.e. des $c, d \in \mathbb{R}$ dont $(c+id)^2 = a$.

Exercice 8 *Déterminer les racines carrés de $a = -3+4i$.*

3.3 Application : Équations du Second Degré

Théorème 4

Soient a, b et $c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions, éventuellement égaux qui sont

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque 7
- *Avec les notations du théorème précédent, on a*

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \textit{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

  et on a alors $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$

- *Dans le cas où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, les deux solutions de l'équation sont des nombres complexes conjugués :*

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \textit{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice 9 *Résoudre dans C l'équation $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.*

3.4 Factorisation D'un Polynôme

Théorème 5

Soient P un polynôme à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$.
Si a est une racine de P, i.e. si $P(a) = 0$, alors il existe Q un polynôme sur $\mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

Remarque 8 *Dans ce cas,* $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Exercice 10 *Considérons $P(z) = z^3 - z^2 + (5+7i)z + 10 - 2i$.*

1. *Justifier que P se factorise sous la forme $P(z) = (z-2i)Q(z)$, où Q est un polynôme à coefficients complexes.*

2. *Déterminer Q.*

4 Exponentielle Complexe

Définition 8

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit l'**expenentielle de** de z par :

$$e^z := e^x e^{iy} = e^{Re(x)} (\cos(y) + i \sin(y))$$

Remarque 9 *On a alors :*

- $Re(e^z) = e^{Re(z)} \cos(Im(z))$
- $Im(e^z) = e^{Re(z)} \sin(Im(z))$
- $|e^z| = e^{Re(z)}$
- $\arg(e^z) \equiv Im(z)[2\pi]$

Propriétés 5

Soient $r, r', \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $r, r' \geq 0$, alors

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Notation 1 *On note par $2i\pi\mathbb{Z}$ les nombres **complexes** de la forme $2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'équivalence dans Propriétés 5 devient alors :*

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta - \theta' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Proposition 9

Soient z, z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $e^z \neq 0$.
- $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} z^{z_2}$.
- $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.
- $e^{nz} = (e^z)^n$.

Notation 2 *Puisque pour tout $z \in \mathbb{R}$, e^z n'est en fait que son imagine par la fonction exponentielle **réelle**. On note alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) := e^z$.*

Proposition 10

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Considérons sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = a$ d'inconnue z.
Les solutions de cette équation sont les nombres complexes $\ln(|a|) + iy$, avec $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \equiv \arg(a)[2\pi]$.

5 Nombres complexes et Géométrie plane

Pour tout le reste, on considère $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 11

Si $A(a)$ et $B(b)$ deux points de $\mathcal{P}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, alors :

- $\overrightarrow{AB}(b-a)$
- $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |b-a|$ et $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$.

Corollaire 1

Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ des points de $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors :

- $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

Corollaire 2: Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité

Soient $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts deux à deux de $\mathcal{P}$ Alors,

- A, B et C sont alignés $\iff \dfrac{b-c}{c-a} \in \mathbb{R}$
- $(AB) \perp (AC) \iff \dfrac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}$

Proposition 12: Caractérisation de la cocyclicité

Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus que A, B, C sont non alignés. Alors

$$A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques} \iff \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} \in \mathbb{R}$$

5.1 Transoformations usuelles

Proposition 13

Soient $M(z)$ et $M(z')$ deux points de $\mathcal{P}$. Alors,

- M et M' sont symétriques par rapport à O si et seulement si $z' = -z$.
- M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$ si et seulement si $z' = \overline{z}$.
- M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{j})$ si et seulemnt si $z' = -\overline{z}$.

Proposition 14

Soient $M(z), \Omega(\omega), \vec{u}(a)$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la **translation** de vecteur $\vec{u}(a)$ si et seulement si $z' = z + a$.
2. $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'**homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport λ si et seulemnt si $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.
3. $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par **la rotation** de centre $\omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

5.2 Similitudes Directes

Définition 9

Une **similitude directe** est une transformation de plan admettant comme représentation dans le plan complexe l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Théorème 6

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude du plan telle que $f(z) = az+b$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors,

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un point fixe unique Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. On appelle Ω le centre de la similitude. De plus, si

$$\begin{cases} \arg(a) \equiv \theta[2\pi] \\ r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \theta \\ h \text{ est l'homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } |a| \end{cases}$$

alors $f = r \circ h = h \circ r$.